Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 10

1. Les valeurs propres sont 1.1 et 1.3. Comme les deux valeurs propres sont supérieures à 1, il s'agit d'un point de répulsion. Le vecteur propre correspondant à la valeur propre la plus grande, 1.3, est (-3 2)'. La direction de plus grande répulsion est donc la droite passant par l'origine et le point (-3, 2).

2.

```
>>A

A =

    0.9000    0.2000    0.1500
    0.0500    0.7000    0.1000
    0.0500    0.1000    0.7500

>>[P D]=eig(A)

P =

    0.9256    0.8090    0.3090
    0.2492   -0.3090   -0.8090
    0.2848   -0.5000    0.5000


D =

    1.0000         0         0
         0    0.7309         0
         0         0    0.6191
```

Après un très grand nombre d'élections (i.e. $k \to \infty$), la solution tend vers le premier vecteur propre, puisque la première valeur propre est égale à 1 ($1^k = 1$) et les deux autres valeurs propres sont inférieures à 1.

$$\mathbf{x}_k = c_1 \begin{bmatrix} 0,9256 \\ 0,2492 \\ 0,2848 \end{bmatrix}$$

La proportion entre les partis est donnée par le vecteur propre:

Parti A: (0.9256)/(0.9256+0.2492+0.2848) = 0.6346 (63.5%)
Parti B: (0.9256)/(0.9256+0.2492+0.2848) = 0.1707 (17.1%)
Parti C: (0.9256)/(0.9256+0.2492+0.2848) = 0.1951 (19.5%)

3. On trouve $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ et

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On trouve aussi que $\mathbf{x}_0 = (13/4)\mathbf{v}_1 - (5/4)\mathbf{v}_2$. La solution complète est donc:

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{13}{4}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - \left(\frac{5}{4}\right)\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Comme les valeurs propres sont de signes opposés, l'origine est un point de selle. La direction de la plus grande attraction est selon le vecteur propre correspondant à la valeur -1, soit la droite passant par l'origine et le point (-5, -1). La direction de plus grande répulsion est la droite passant par l'origine et le point (-1, 1).

4.
```
>>A=[0 -2
0.4 -0.8]

A =

         0   -2.0000
    0.4000   -0.8000

>>[P D]=eig(A)

P =

  -0.8165 + 0.4082i  -0.8165 - 0.4082i
        0 + 0.4082i        0 - 0.4082i


D =

  -0.4000 + 0.8000i        0
        0            -0.4000 - 0.8000i

>>x0=[0 12]'

x0 =
```

```
      0
     12

>>c=inv(P)*x0

c =

   7.3485 -14.6969i
   7.3485 +14.6969i

>>c(1)*P(:,1)

ans =

        0 +15.0000i
   6.0000 + 3.0000i

>>c(2)*P(:,2)

ans =

        0 -15.0000i
   6.0000 - 3.0000i
```

Cela nous donne donc la solution:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= \begin{bmatrix} 15i \\ 6+3i \end{bmatrix} e^{(-0,4+0,8)t} + \begin{bmatrix} -15i \\ 6-3i \end{bmatrix} e^{(-0,4-0,8)t} \\
&= \begin{bmatrix} 15ie^{0,8t} - 15ie^{-0,8t} \\ 6e^{0,8t} + 3ie^{0,8t} + 6e^{-0,8t} - 3ie^{-0,8t} \end{bmatrix} e^{-0,4t} \\
&= \begin{bmatrix} -30\sin(0,8t) \\ 12\cos(0,8t) - 6\sin(0,8t) \end{bmatrix} e^{-0,4t}
\end{aligned}$$

5.

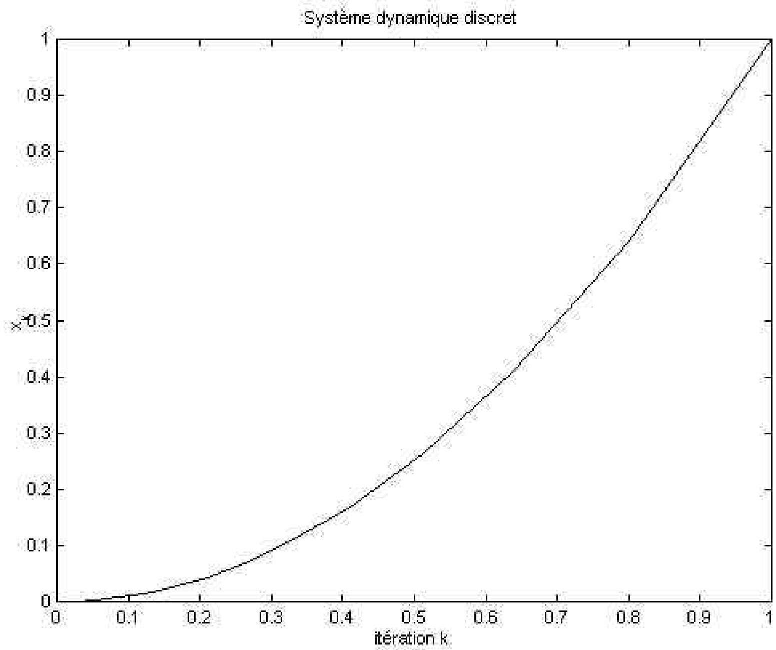
```
function y=dev10(A,x0,a)

[P, D]=eig(A);
c=inv(P)*x0;
if (a==0)
   k=[0:20];
```

```
   y=c(1)*P(:,1)*D(1,1).^k+c(2)*P(:,2)*D(2,2).^k;
   plot(y(1,:), y(2,:))
   title('Système dynamique discret')
   xlabel('itération k')
   ylabel('x_k')
else
   t=linspace(0,10);
   y=c(1)*P(:,1)*exp(D(1,1)*t)+c(2)*P(:,2)*exp(D(2,2)*t);
   plot(y(1,:), y(2,:))
   title('Système dynamique continu')
   xlabel('t')
   ylabel('x(t)')
end
```

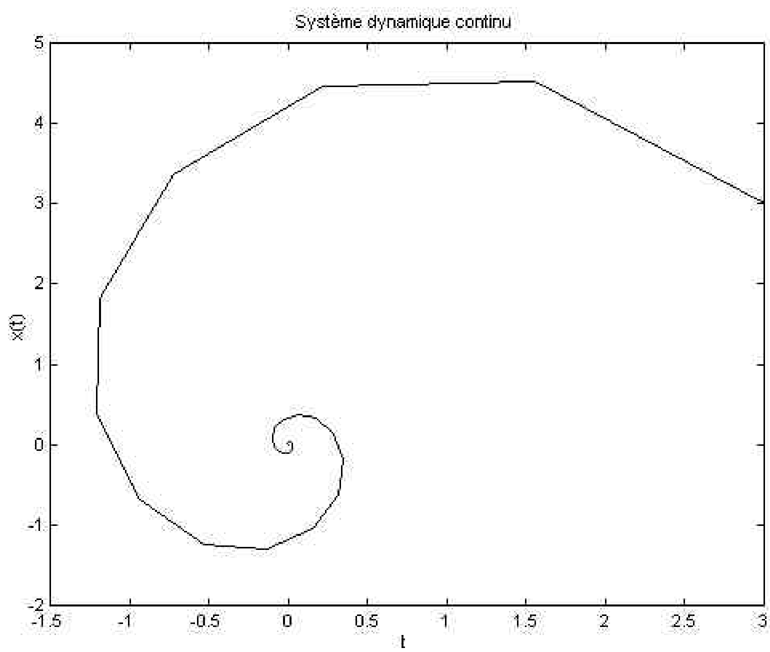
Exemples d'application:

```
>>A

A =

    0.8000         0
         0    0.6400

>>x0

x0 =

     1
     1

>>y=dev10(A,x0,0);

A =

   -2.0000   -2.5000
   10.0000   -2.0000

>>x0

x0 =

     3
     3
```

```
>>y=dev10(A,x0,1);
```



Système dynamique discret
x
itération k



Système dynamique continu
x(t)
t