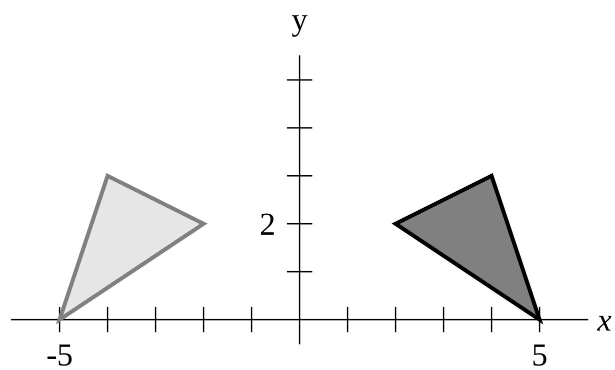
Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Devoir #11

2.8.2

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



2.8.4

La matrice de gain est:

$$G = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de translation est:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice qui effectue la transformation 2D composite voulue est:

$$GT = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & -1.6 \\ 0 & 1.2 & 3.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8.6

La matrice qui effectue la rotation de 30 degrés est:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice qui effectue la symétrie par rapport à l'axe des x est:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice qui effectue la transformation 2D composite voulue est:

$$SR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8.14

La matrice effectuant la transformation 2D peut s'écrire:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3+4\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 4-3\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3+4\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 4-3\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est équivalent à une rotation de 60 degrés par rapport à l'origine, suivie d'une translation de $(3+4\sqrt{3}, 4-3\sqrt{3})$.

2.8.22

```
>> A=[0.299 0.587 0.114;0.596 -0.275 -0.321;0.212 -0.528 0.311];

>> inv(A)

ans =
```

```
    1.0031    0.9548    0.6179
    0.9968   -0.2707   -0.6448
    1.0085   -1.1105    1.6996
```

Le systèmes d'équations réalisant la conversion YIQ -> RGB est donc:

$$\begin{aligned} R &= 1.0031Y + 0.9548I + 0.6179Q \\ G &= 0.9968Y - 0.2707I - 0.6448Q \\ B &= 1.0085Y - 1.1105I + 1.6996Q \end{aligned}$$

5.7.6

Les valeurs propres de *A* sont -1 et -2. Les vecteurs propres respectifs sont:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a alors:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Or:

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On résout et l'on trouve que $c_1 = 5$ et $c_2 = -3$. D'où:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 5e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Les 2 valeurs propres de ce système sont négatives, donc l'origine est un puits. La direction de la plus grande attraction est la droite passant par le point (2/3,1) (ou (2,3)) et l'origine.

5.7.8

Soit *D* la matrice diagonale constituée par les valeurs propres de *A*:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A et D sont similaires si $A = PDP^{-1}$. On trouve:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

En substituant $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ dans $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, on a:

$$\frac{d}{dt}(P\mathbf{y}) = A(P\mathbf{y})$$

$$P\mathbf{y}' = PDP^{-1}(P\mathbf{y}) = PD\mathbf{y}$$

En multipliant chaque membre de l'équation par P^{-1}, on obtient:

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

5.7.20

```
>> A=[-2 1/3; 3/2 -3/2];
>> x0=[3;3];
>> eig(A)

ans =

   -2.5000
   -1.0000

>> rref(A-(-2.5)*eye(2))

ans =

    1.0000    0.6667
         0         0

>> rref(A-(-1)*eye(2))

ans =

    1.0000   -0.3333
         0         0
```

Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres -2.5 et -1 sont donc:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a alors:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2.5t} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Or:

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

On résout et l'on trouve que c_1 = -2 et c_2 = 5.

D'où:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} e^{-2.5t} + \frac{5}{3} e^{-t} \\ -2e^{-2.5t} + 5e^{-t} \end{bmatrix}$$