Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 11

1.

$$\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\right)\mathbf{x} = \left(\frac{(6)(3)+(-1)(-2)+(-5)(3)}{(6)(6)+(-2)(-2)+(-3)(-3)}\right)\begin{bmatrix}6\\-2\\3\end{bmatrix} = \left(\frac{18+2-15}{36+4+9}\right)\begin{bmatrix}6\\-2\\3\end{bmatrix} = \left(\frac{5}{49}\right)\begin{bmatrix}6\\-2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{30}{49}\\-\frac{10}{49}\\\frac{15}{49}\end{bmatrix}$$

2.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

$$\mathrm{dist}(\mathbf{u},\mathbf{v})\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

3. a)

```
A =

    0.5000    0.5000    0.5000    0.5000
    0.5000    0.5000   -0.5000   -0.5000
    0.5000   -0.5000    0.5000   -0.5000
    0.5000   -0.5000   -0.5000    0.5000

>>u=rand(4,1)

u =

    0.9501
    0.2311
    0.6068
    0.4860

>>v=rand(4,1)

v =
```

```
    0.8913
    0.7621
    0.4565
    0.0185

>>a1=A(:,1)

a1 =

    0.5000
    0.5000
    0.5000
    0.5000

>>a2=A(:,2)

a2 =

    0.5000
    0.5000
   -0.5000
   -0.5000

>>a3=A(:,3)

a3 =

    0.5000
   -0.5000
    0.5000
   -0.5000

>>a4=A(:,4)

a4 =

    0.5000
   -0.5000
   -0.5000
    0.5000

>>sqrt(a1'*a1)

ans =

     1
```

```
>>sqrt(a2'*a2)

ans =

     1

>>sqrt(a3'*a3)

ans =

     1

>>sqrt(a4'*a4)

ans =

     1

>>a1'*a2

ans =

     0

>>a1'*a3

ans =

     0

>>a1'*a4

ans =

     0

>>a2'*a3

ans =

     0

>>a2'*a4

ans =
```

```
     0

>>a3'*a4

ans =

     0
```

On remarque que les colonnes de la matrice sont unitaires et orthogonales entre elles.

b)

```
>>sqrt(u'*u)

ans =

    1.2492

>>sqrt((A*u)'*(A*u))

ans =

    1.2492

>>sqrt(v'*v)

ans =

    1.2585

>>sqrt((A*v)'*(A*v))

ans =

    1.2585
```

On remarque que la matrice A ne change pas la longueur des vecteurs.

c)

```
>>(u'*v)/(sqrt(u'*u)*sqrt(v'*v))

ans =

    0.8326

>>((A*u)'*(A*v))/(sqrt((A*u)'*(A*u))*sqrt((A*v)'*(A*v)))
```

```
ans =

    0.8326
```

On remarque que la matrice *A* ne change pas l'angle entre les vecteurs.

d)

```
>>u=rand(4,1)

u =

    0.8214
    0.4447
    0.6154
    0.7919

>>v=rand(4,1)

v =

    0.9218
    0.7382
    0.1763
    0.4057

>>sqrt(u'*u)

ans =

    1.3705

>>sqrt(v'*v)

ans =

    1.2611

>>sqrt((A*u)'*(A*u))

ans =

    1.3705

>>sqrt((A*v)'*(A*v))

ans =
```

```
    1.2611

>>(u'*v)/(sqrt(u'*u)*sqrt(v'*v))

ans =

    0.8767

>>((A*u)'*(A*v))/(sqrt((A*u)'*(A*u))*sqrt((A*v)'*(A*v)))

ans =

    0.8767
```

Conjecture: une matrice ayant des colonnes unitaires et orthogonales ne change pas la longueur des vecteurs et l'angle entre les vecteurs.

Note: pour calculer le produit scalaire, on peut utiliser la fonction matlab `dot` et pour calculer la longueur d'un vecteur, on peut aussi utiliser la fonction Matlab `norm`.

4. $\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_2 = -6 + 6 = 0$. Les deux vecteurs sont orthogonaux. Deux vecteurs orthogonaux, et donc linéairement indépendants, dans $\mathbf{R}^2$, forme une base pour cet espace vectoriel.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\right)\mathbf{u}_1 + \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\right)\mathbf{u}_2 \\
&= \left(\frac{-18+3}{1+9}\right)\mathbf{u}_1 + \left(\frac{12+18}{4+36}\right)\mathbf{u}_2 \\
&= \left(\frac{-15}{10}\right)\mathbf{u}_1 + \left(\frac{30}{40}\right)\mathbf{u}_2 \\
&= \left(-\frac{3}{2}\right)\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \frac{3}{4}\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{10}}{10}\\ \frac{\sqrt{10}}{10}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} = \frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

6. Si U est une matrice orthogonale, alors $I = UU^{-1} = UU^T$. Puisque U est la transposée de U^T, on peut appliquer le théorème 6 (p. 384 du livre) à U^T. On trouve alors que U^T a des colonnes orthonormales. En particulier, les colonnes de U^T sont linéairement indépendantes et forment donc une base pour $\mathbf{R}^n$ (par le théorème des matrices inversibles). Cela signifie que les lignes de U (i.e. les colonnes de U^T) forment une base pour $\mathbf{R}^n$.

7.
```
function y=dev11(A,x0,a)

[P, D]=eig(A);
c=inv(P)*x0;
n=length(x0);
if (a==0)
   k=[0:20];
   y=zeros(n,21);
   for i=1:n
      y=y+c(i)*P(:,i)*D(i,i).^k;
   end
   for i=1:n
      subplot(n,1,i)
      plot(k,y(i,:))
      xlabel('Itération k')
      ylabel(strcat('x_',int2str(i)))
   end
else
   t=linspace(0,10);
   y=zeros(n,100);
   for i=1:n
      y=y+c(i)*P(:,i)*exp(D(i,i)*t);
   end
   for i=1:n
      subplot(n,1,i)
```

```
        plot(t,y(i,:))
        xlabel('t')
        ylabel(strcat('x_',int2str(i),'(t)'))
    end
end
```

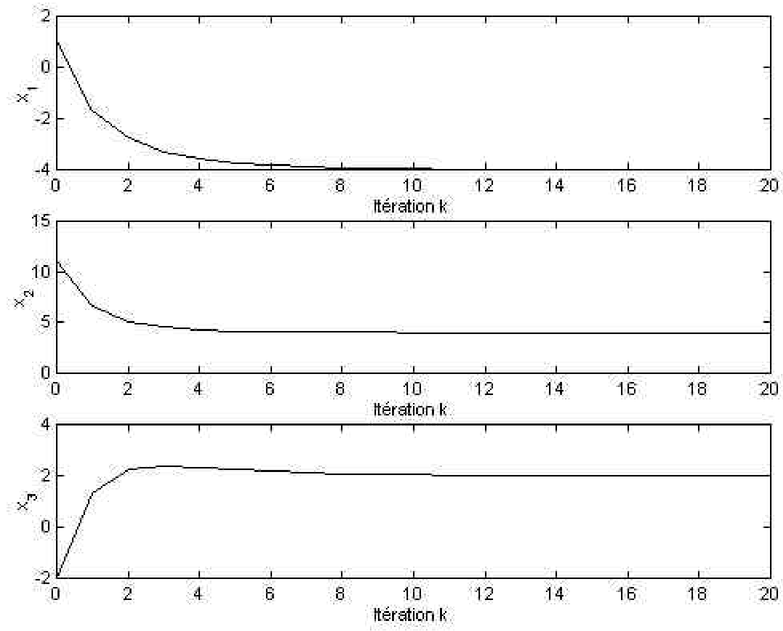
Exemples d'applications:

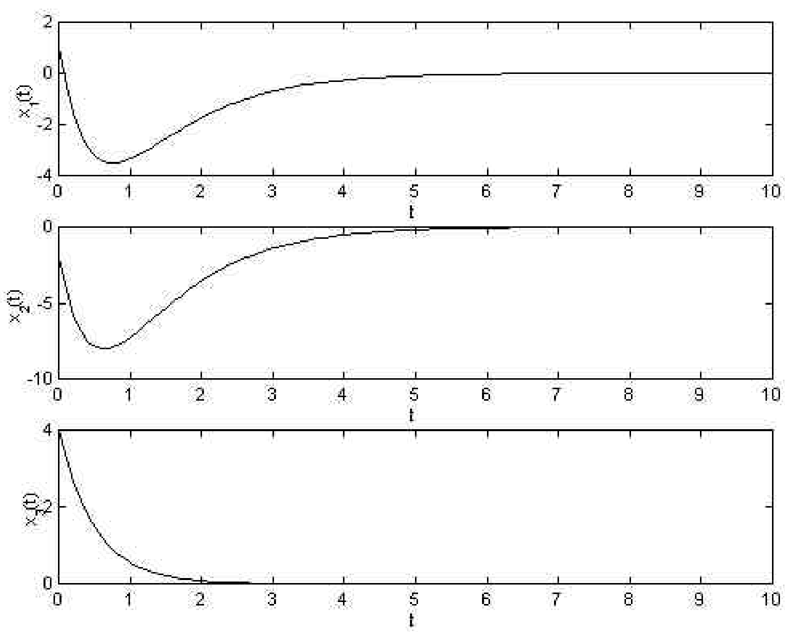
Cas discret: "Practice Problem" de la page 345. La solution tend vers 2$\mathbf{v}_1$ tel qu'indiqué à l'équation (12) p. 347.

```
A =

     7/9          -2/9          0
    -2/9           2/3          2/9
      0            2/9          5/9

>>x0

x0 =

      1
     11
     -2

>>y=dev11(A,x0,0);
```

Cas continu:

```
A =

     -5            2           -2
     -6            2           -4
      0            0           -2

>>x0

x0 =

      1
     -2
      4

>>y=dev11(A,x0,1);
```


x_1
x_2
x_3
Itération k
Itération k
Itération k


x_1(t)
x_2(t)
x_3(t)
t
t
t