Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 1

1.1.26) Pour vérifier si un système est compatible, il suffit de réduire la matrice augmentée sous forme échelon.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & g \\ 4 & 7 & -4 & h \\ -6 & -3 & 1 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & g \\ 4 & 7 & -4 & h \\ 0 & 9 & -6 & k+g+h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & g \\ 0 & -3 & 2 & h-2g \\ 0 & 9 & -6 & k+g+h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & g \\ 0 & -3 & 2 & h-2g \\ 0 & 0 & 0 & k+g+h+3(h-2g) \end{bmatrix}$$

Pour que le système ait une solution, $k + g + h + 3(h - 2g) = 0$, i.e. $k + 4h - 5g = 0$.

1.1.36) Le système d'équation est donné au numéro 1.1.35 (réponse à la page A21 du livre).

```
>>A

A =

     4    -1     0    -1     0     0
    -1     4    -1     0    -1     0
     0    -1     4     0     0    -1
    -1     0     0     4    -1     0
     0    -1     0    -1     4    -1
     0     0    -1     0    -1     4

>>b

b =

    30
    20
    60
    30
    20
    60

>>A\b

ans =

   17.1429
   21.4286
```

27.1429
17.1429
21.4286
27.1429

1.2.16) Le système est déjà sous forme échelon. Les colonnes pivot sont les colonnes 1, 2 et 5. Il suffit de le mettre sous forme échelon réduit.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 et x_4 sont donc les variables libres. Pour les autres variables on a $x_1 = 3 + 5x_3$, $x_2 = 6 + x_4 - 4x_3$ et $x_5 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 5x_3 \\ x_2 = 6 - 4x_3 + x_4 \\ x_3 \text{ est libre} \\ x_4 \text{ est libre} \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

1.2.36) En utilisant $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$, on calcule p(0), p(2),..., p(10). On obtient un système de 6 équations à 6 inconnues.

```
>>A

A =

     1     0     0     0     0     0
     1     2     4     8    16    32
     1     4    16    64   256  1024
     1     6    36   216  1296   7776
     1     8    64   512  4096  32768
     1    10   100  1000 10000 100000

>>b'

ans =

    0   2.9000   14.8000   39.6000   74.3000 119.0000

>>(A\b)'

ans =
```

```
0    1.7125   -1.1948    0.6615   -0.0701    0.0026
```

Donc, $p(t) = 1.7125t - 1.1948t^2 + 0.6615t^3 - 0.0701t^4 + 0.0026t^5$. Si on substitue 7.5 dans cette équation, on obtient $p(7.5) = 64.6$ (64.8 si on utilise les coefficients donnés par Matlab avec toute leur précision).

1.3.28

a) $26.6x_1 + 30.2x_2$ millions de Btu.

b) $x_1\begin{bmatrix}27,6\\3100\\250\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}30,2\\6400\\360\end{bmatrix}$

c) Le système à résoudre est:

$$x_1\begin{bmatrix}27,6\\3100\\250\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}30,2\\6400\\360\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}162\\23610\\1623\end{bmatrix}$$

```
>>A

A =

 1.0e+003 *

    0.0276    0.0302
    3.1000    6.4000
    0.2500    0.3600

>>b

b =

         162
       23610
        1623

>>A\b

ans =

    3.9000
    1.8000
```

Note: le “\” fonctionne aussi avec une matrice rectangulaire. On peut aussi utiliser rref.

```
>>M=[A b]

M =

 1.0e+004 *

    0.0028    0.0030    0.0162
    0.3100    0.6400    2.3610
    0.0250    0.0360    0.1623

>>rref(M)

ans =

    1.0000         0    3.9000
         0    1.0000    1.8000
         0         0         0
```

Dans les deux cas, on obtient $x_1 = 3.9$ tonnes d’anthracite et $x_2 = 1.8$ tonne de charbon bitumineux.

1.4.44)

```
>>A

A =

     8    11    -6    -7    13
    -7    -8     5     6    -9
    11     7    -7    -9    -6
    -3     4     1     8     7

>>rref(A(:,[1 2 3 4]))

ans =

    1.0000         0   -0.5385         0
         0    1.0000   -0.1538         0
         0         0         0    1.0000
         0         0         0         0
>>rref(A(:,[1 2 3 5]))

ans =
```

```
    1.0000         0   -0.5385         0
         0    1.0000   -0.1538         0
         0         0         0    1.0000
         0         0         0         0
>>rref(A(:,[1 2 4 5]))

ans =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1

>>rref(A(:,[1 3 4 5]))

ans =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1

>>rref(A(:,[2 3 4 5]))

ans =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

Donc, on peut enlever la colonne 1 ou la colonne 2 ou la colonne 3. On ne peut pas enlever plus d'une colonne puisqu'il faut au moins 4 vecteurs pour générer $\mathbf{R}^4$.

1.6.40) Une matrice $m \times n$ qui possède n colonnes pivot a un pivot dans chacune de ses colonnes. Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a donc pas de variable libre. Si une solution existe, elle doit être unique.

1.7.30) $T(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b} \neq 0$. T ne peut donc être une transformation linéaire.