Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Devoir #2

2.3.12

Cette matrice est inversible car on peut la réduire de façon à ce que chacune de ses colonnes soit une colonne pivot:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 9 & 5 \\ 8 & 6 & 4 & 10 & 4 \\ 9 & -8 & 9 & -5 & 8 \\ 10 & 8 & 7 & -9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -21 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.3.24

Si A est inversible, A^{-1}est inversible aussi (théorème 6.a à la section 2.2). Donc le théorème de la matrice inversible s'applique à A^{-1}, et ses colonnes sont linéairement indépendantes.

2.3.38

```
>> A = [7 -6 -4 1; -5 1 0 -2; 10 11 7 -3; 19 9 7 1]

A =

      7     -6     -4      1
     -5      1      0     -2
     10     11      7     -3
     19      9      7      1

>> cond(A)

ans =

     2.3683e+04

>> x = rand(4,1)

x =
```

```
      0.2190
      0.0470
      0.6789
      0.6793

>> b = A * x

b =

     -0.7857
     -2.4063
      5.4212
     10.0150

>> x1 = inv(A) * b

x1 =

      0.2190
      0.0470
      0.6789
      0.6793
```

Cet exemple permet de voir qu'au moins 4 chiffres coïncident entre **x** et $\mathbf{x}_1$. Or, Matlab donne des chiffres avec 16 chiffres de précision. cond(A) est de l'ordre de 10^4. Donc **x** et $\mathbf{x}_1$ devraient coïncider sur au moins 16 - 4 = 12 chiffres.

2.3.40

Il faut résoudre:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec Matlab:

```
>> x = inv(A) * b
```

```
x =

      1.0e+04 *

       0.0630
      -1.2600
       5.6700
      -8.8200
       4.4100
```

Or le nombre de condition de A est de 4.7661 * 10^5, donc de l'ordre de 10^5. Avec la précision de 16 chiffres de Matlab, le nombre de chiffres qui coïncident entre le vecteur **x** trouvé par Matlab et le vecteur exact serait de 16 - 5 = 11.

2.5.4

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

La résolution du système donne:

$y_1 = 0$
$y_2 = -5$
$y_3 = -18$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{bmatrix}$$

La résolution du système donne:

$x_1 = -5$
$x_2 = 1$
$x_3 = 3$

2.5.18

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -14 & 6 & 8 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

2.5.22

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Si $A = LU$, avec seulement trois rangées non-nulles dans U, on utilise les trois premières colonnes de L pour B et les trois rangées du haut de U pour C.

2.5.28

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

La résistance de “shunt” équivalente est:

$$\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)^{-1}$$

2.5.32

a.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{55} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{21} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{144}{55} \end{bmatrix}$$

b. Soit le vecteur $\mathbf{s}_k$ qui satisfait l'égalité $L\mathbf{s}_k = \mathbf{t}_{k\text{-}1}$. Alors $\mathbf{t}_k$ satisfait l'égalité $U\mathbf{t}_\mathrm{k} = \mathbf{s}_k$.

$$\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 10.0000 \\ 15.3333 \\ 17.7500 \\ 18.7619 \\ 17.1636 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 6.5556 \\ 9.6667 \\ 10.4444 \\ 9.6667 \\ 6.5556 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 6.5556 \\ 11.8519 \\ 14.8889 \\ 15.3386 \\ 12.4121 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 4.7407 \\ 7.6667 \\ 8.5926 \\ 7.6667 \\ 4.7407 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} 4.7407 \\ 9.2469 \\ 12.0602 \\ 12.2610 \\ 9.4222 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} 3.5988 \\ 6.0556 \\ 6.9012 \\ 6.0556 \\ 3.5988 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \begin{bmatrix} 3.5988 \\ 7.2551 \\ 9.6219 \\ 9.7210 \\ 7.3104 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_4 = \begin{bmatrix} 2.7922 \\ 4.7778 \\ 5.4856 \\ 4.7778 \\ 2.7922 \end{bmatrix}$$