Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Devoir #4

2.9.4

La somme de 2 vecteurs dans *H* donne un vecteur dans *H*, mais la multiplication d'un vecteur par un scalaire négatif donne un vecteur qui n'est pas dans *H*.

2.9.14

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Vecteur dans Nul *A*: $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, ou n'importe quel multiple non nul de ce vecteur.

Vecteur dans Col *A*: n'importe quelle colonne de *A*.

2.9.24

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & -9 & -3 & -3 & -4 \\ -2 & 6 & 6 & 5 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes 1, 2 et 4 sont des colonnes pivots. Donc, Col *A*: $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

On met la matrice augmentée [*A* **0**] sous forme d'échelon réduit. On a alors

$$[A\ \mathbf{0}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système linéaire d'équations résultant est:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & +3x_3 & & +(5/2)x_5 = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & & +(3/2)x_5 = 0 \\ & & & x_4 & + x_5 \quad = 0 \\ & & & & \quad\quad 0 = 0 \end{array}$$

La solution générale est:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_3 - \frac{5}{2}x_5 \\ -2x_3 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a donc: Nul A: $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.9.28

Les 3 colonnes pivots de A forment une base pour Col A, donc Col A est un sous-espace tri-dimensionnel de $\mathbf{R}^4$. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a quatre variables libres, donc Nul A est de dimension 4. On peut aussi obtenir cette réponse en utilisant le théorème sur le rang d'une matrice.

$$\text{rang } A + \dim \text{Nul } A = n$$

$$\text{rang } A = \dim \text{Col } A = 3,\ n = 7,\ \Longrightarrow \dim \text{Nul } A = 7 - 3 = 4.$$

2.9.32

On a le système augmenté

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & -8 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Ce système se réduit à (en utilisant `rref` en Matlab, par exemple)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où la solution:

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vérification:

$$\frac{3}{2} \times \mathbf{b}_1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \mathbf{b}_2 = \frac{3}{2} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.5 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3.5 \\ -2.5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$

2.9.42

Les p colonnes de A engendrent Col A, par définition. Si Col A est de dimension p, alors l'ensemble des combinaisons linéaires des p colonnes est automatiquement une base pour Col A, par le théorème sur les bases, et donc les colonnes sont linéairement indépendantes.

2.9.46

Avec Matlab, on a:

```
A =

     5     2     0    -8    -8
     4     1     2    -8    -9
     5     1     3     5    19
    -8    -5     6     8     5

>> rref(A)


ans =
```

```
1     0     0    60   122
0     1     0  -154  -309
0     0     1   -47   -94
0     0     0     0     0
```

On obtient immédiatement:

Col A: $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, Nul A: $\begin{bmatrix} -60 \\ 154 \\ 47 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -122 \\ 309 \\ 94 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.