Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Devoir #5

3.1.14

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 0.C_{15} - 0.C_{25} + 1.\det\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 0.C_{45} + 0.C_{55}$$

$$= 3.\det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 0.C_{32} + 0.C_{33} - 0.C_{34} = 3 \times (3.(-11) - 2.(-2) + 4.(8)) = 9$$

3.1.46

```
>> A4=rand(4,4)

A4 =

    0.9501    0.8913    0.8214    0.9218
    0.2311    0.7621    0.4447    0.7382
    0.6068    0.4565    0.6154    0.1763
    0.4860    0.0185    0.7919    0.4057

>> det(inv(A4))

ans =

    8.6562

>> det(A4)

ans =

    0.1155
```

On a: det A^{-1} = 1 / (det A).

3.2.26

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & -6 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 3.\det\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3.(3.(-18) - 2(9) - 2(-36)) = 0$$

Donc cet ensemble de vecteurs est linéairement dépendant.

3.2.44

$\det AE = \det(AE)^T$ (Théorème 5)
$= \det E^T A^T$
$= (\det E^T)(\det A^T)$ (Théorème 3, voir p. 192 du livre)
$= (\det E)(\det A)$ (Théorème 5)

3.2.46

$\det A = -1$
$\operatorname{cond} A = 23683$

Bien que A soit presque singulière, elle a un inverse:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ -14 & -401 & 195 & -203 \\ 19 & 549 & -267 & -278 \\ -7 & -196 & 95 & -99 \end{bmatrix}$$

Le déterminant change avec la multiplication de A par un scalaire, mais la condition de la matrice reste la même:

$\det(10A) = 10^4(-1)$
$\det(0.1A) = 10^{-4}(-1)$

$\operatorname{cond}(10A) = \operatorname{cond}(0.1A) = \operatorname{cond} A$

Il en est de même lorsque $A = I_4$.

3.3.26

Par définition, **p** + *S* est l'ensemble de tous les vecteurs de la forme **p** + **v**, ou **v** est dans *S*. En appliquant *T* à un vecteur typique dans **p** + *S*, on a *T*(**p** + **v**) = *T*(**p**) + *T*(**v**). Ce vecteur est dans l'ensemble dénoté par *T*(**p**) + *T*(*S*). Ceci prouve que *T* transforme l'ensemble **p** + *S* en l'ensemble *T*(**p**) + *T*(*S*).

Inversement, n'importe quel vecteur dans *T*(**p**) + *T*(*S*) a la forme *T*(**p**) + *T*(**v**) pour un **v** dans *S*. Ce vecteur peut s'écrire *T*(**p** + **v**). Ceci montre que chaque vecteur dans *T*(**p**) + *T*(*S*) est l'image par *T* d'un point dans **p** + *S*.

3.3.30

Soit **p** = (x_3,y_3) et *R'* = *R* - **p**. Les sommets de *R'* sont $\mathbf{v}_1 = (x_1 - x_3, y_1 - y_3)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2 - x_3, y_2 - y_3)$, et l'origine. Alors:

{aire de *R*} = {aire de *R'*)

= 1/2 * {aire du parallélogramme déterminée par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$}

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}\right| \qquad (1)$$

Aussi, en effectuant des opérations sur les lignes, on obtient:

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$$

Ce calcul et la relation (1) donnent le résultat désiré.

3.3.34

```
>> A=rand(4,4)

A =

    0.9355    0.0579    0.1389    0.2722
    0.9169    0.3529    0.2028    0.1988
    0.4103    0.8132    0.1987    0.0153
    0.8936    0.0099    0.6038    0.7468

>> b=rand(4,1)

b =
```

```
    0.4451
    0.9318
    0.4660
    0.4186

>> inv(A) * b

ans =

    1.9009
   -2.4287
    9.0505
   -8.9996

>> x1=det([b A(:,2:4)])/det(A)

x1 =

    1.9009

>> x2=det([A(:,1) b A(:,3:4)])/det(A)

x2 =

   -2.4287

>> x3=det([A(:,1:2) b A(:,4)])/det(A)

x3 =

    9.0505

>> x4=det([A(:,1:3) b])/det(A)

x4 =

   -8.9996

>>
```

Matlab donne les mêmes résultats (à 4 chiffres après le point décimal) pour le méthode de Cramer et le calcul direct de **x**.