Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Devoir #6

5.1.8

$A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ (1)

=> $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$ (2)

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes de A sont linéairement indépendantes, donc (2) a une solution non triviale. 3 est donc une valeur propre de A. On résout (2):

$$\begin{aligned} x_1 \quad -3x_3 &= 0 \\ x_2 \ -2x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

=> $x_1 = 3x_3$
$x_2 = 2x_3$

x_3 est une variable libre.

Les vecteurs propres sont alors des multiples de $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5.1.16

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc:

$(A - 4I)\mathbf{x} = 0$

$$\begin{aligned} x_1 \quad -2x_3 &= 0 \\ x_2 \; -3x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution générale est:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc une base est: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

5.1.20

Une valeur propre est $\lambda = 0$, car la matrice n'est pas inversible. Les vecteurs propres correspondant à cette valeur propre ont des composantes qui produisent des relations de dépendance linéaire entre les colonnes de A. N'importe quel vecteur (dans $\boldsymbol{R}^3$) dont la somme des composantes est égale à zéro fera l'affaire, puisque les 3 lignes de A sont identiques.

Par exemple, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5.1.32

Supposons que T réfléchisse les points par rapport à une droite passant par l'origine. Cette droite consiste en l'ensemble de tous les multiples d'un vecteur **v** non-nul. Les points sur cette droite ne sont pas déplacés par l'action de T. Donc $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Si A est la matrice standard de T, alors $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Donc **v** est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre 1. L'espace propre correspondant est donc l'ensemble des multiples de **v**, i.e. Span{**v**}.

5.1.38

```
>> eig(A)

ans =

    2.0000
    3.0000
    2.0000
    3.0000
    2.0000

>> B=rref(A-3*eye(5))

B =

    1.0000         0         0         0    0.3333
         0    1.0000         0    2.0000   -2.0000
         0         0    1.0000         0   -0.3333
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
```

La solution générale est:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Une base est donc : $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$

5.2.14

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 7 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 7 & -2-\lambda \end{bmatrix} + 2\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} + 3\det \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$= (5-\lambda)\ (1-\lambda)\ (-2-\lambda) + 3\,(-6\,(1-\lambda)) = (5-\lambda)\left(-2+\lambda+\lambda^2\right) - 18 + 18\lambda$

$= -10 + 5\lambda + 5\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - 18 + 18\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 25\lambda - 28$

5.2.26

Si $a \neq 0$, alors : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{bmatrix} = U$, et det $A = (a)(d - ca^{-1}b) = ad - bc$.

Si $a = 0$, alors : $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix} = U$, et det $A = (-1)^1(cb) = 0 - bc = -bc$.

5.2.28

```
>> A=round(10*rand(4,4))

A =

     9     1     1     3
     9     4     2     2
     4     8     2     0
     9     0     6     7

>> poly(A)

ans =

    1.0000  -22.0000  111.0000 -229.0000 -266.0000

>> poly(A')

ans =

    1.0000  -22.0000  111.0000 -229.0000 -266.0000

>>
```

Donc A et A^T ont le même polynôme caractéristique.

```
>> [V,D]=eig(A)

V =

   0.4093            0.1786            0.0630- 0.2640i   0.0630+
0.2640i
```

```
   0.4824           -0.3096           -0.2632- 0.0323i  -0.2632+
0.0323i
   0.3917            0.6292           -0.5867+ 0.3419i  -0.5867-
0.3419i
   0.6681           -0.6901            0.4335+ 0.4549i   0.4335-
0.4549i


D =

  16.0318                 0                0                0
       0          -0.8002                  0                0
       0                0           3.3842+ 3.0467i         0
        0                  0                  0              3.3842-
3.0467i

>> [V1,D1]=eig(A')

V1 =

   0.8767          0.0810- 0.5595i   0.0810+ 0.5595i   0.5480
   0.2341          0.5982+ 0.2629i   0.5982- 0.2629i  -0.7455
   0.2425         -0.1563+ 0.2775i  -0.1563- 0.2775i   0.3788
   0.3431         -0.3899- 0.0097i  -0.3899+ 0.0097i  -0.0196


D1 =

  16.0318                 0                0                0
       0           3.3842+ 3.0467i        0                0
       0                0           3.3842- 3.0467i         0
       0                0                0           -0.8002
```

Donc A et A^T ont les mêmes valeurs propres mais non les mêmes vecteurs propres, à moins que $A = A^T$.

Voici un petit programme qui permet de faire l’exercice sur des matrices de taille quelconque.

```
function prob28(A)

n=size(A,1);
poly(A)-poly(A’)% pour vérifier si les valeurs propres sont les mêmes
vp_a1=eig(A);
vp_a2=eig(A’);
vect1=[];
vect2=[];
```

```
for i=1:n,
   vect1=[vect1 null(A-eye(n)*vp_a1(i), 'r')];
   vect2=[vect2 null(A'-eye(n)*vp_a2(i), 'r')];
end

% Affichage des vecteurs propres

vect1
vect2
```

5.2.30

```
% exo5230.m

A=[-6 28 21;4 -15 -12;-8 32 25];

disp('Le polynome caracteristique est: ')
poly(A)
disp('Les valeurs propres sont: ')
eig(A)
```

On exécute ce programme:

```
>> exo5230
Le polynome caracteristique est:

ans =

    1.0000   -4.0000    5.0000   -2.0000

Les valeurs propres sont:

ans =

    1.0000
    2.0000
    1.0000

>>
```

De même, on trouve les valeur propres suivantes:

a = 31.9: λ = 0.2958, 1, 2.7042
a = 31.8: λ = –0.1279, 1, 3.1279
a = 32.1: λ = 1, 1.5 + 0.9747i, 1.5 – 0.9747i
a=32.2: λ = 1, 1.5 + 1.466i, 1.5 – 1.466i

Voici un petit programme permettant de tracer les graphiques demandés.

```
function vp(A, a)

% A: matrice
% a: vecteur colonne contenant le coefficient à modifier

grid on % pour avoir une grille sur le graphique
hold on % permet d'avoir plusieurs courbes sur la même figure

x=linspace(0,3);
c='kmbrg'; % pour avoir des courbes de différentes couleur

for i=1:size(a,1),
   A(3,2)=a(i);
   p=poly(A); % calcul du polynôme caractéristique de A
   roots(p) % on affiche les valeurs propres
   v=polyval(p,x);
   plot(x,v, c(i));
end

xlabel('t')
ylabel('p(t)')
```

Voici un exemple de son utilisation. Le graphique est donné à la figure 1.

```
>> a

a =

   32.0000
   31.9000
   31.8000
   32.1000
   32.2000

>> A

A =

    -6    28    21
     4   -15   -12
    -8    32    25

>> vp(A,a)

ans =

   2.0000
   1.0000 + 0.0000i
   1.0000 - 0.0000i
```

```
ans =

    2.7042
    1.0000
    0.2958

ans =

    3.1279
    1.0000
   -0.1279

ans =

   1.5000 + 0.9747i
   1.5000 - 0.9747i
   1.0000

ans =

   1.5000 + 1.4663i
   1.5000 - 1.4663i
   1.0000
```

En observant la figure 1, on constate que 1 est une valeur propre de A pour les 5 valeurs du paramètre a. Les courbes pour a = 32.2 et a = 32.1 ne croisent l'axe t qu'en un seul point (t = 1), de sorte que les deux autres racines de ces polynômes doivent être complexes, ce qui est confirmé par le calcul du programme `vp`. Les courbes pour a = 31.9 et a = 31.8 croisent l'axe t 3 fois (mais pas nécessairement dans l'intervalle [0 3]). Ceci correspond donc à 3 valeurs propres réelles, résultat encore confirmé par `vp`.

Note: j'ai utilisé la fonction Matlab `gtext` pour identifier les 5 courbes. Exemple:

```
>> gtext('a=32')
```

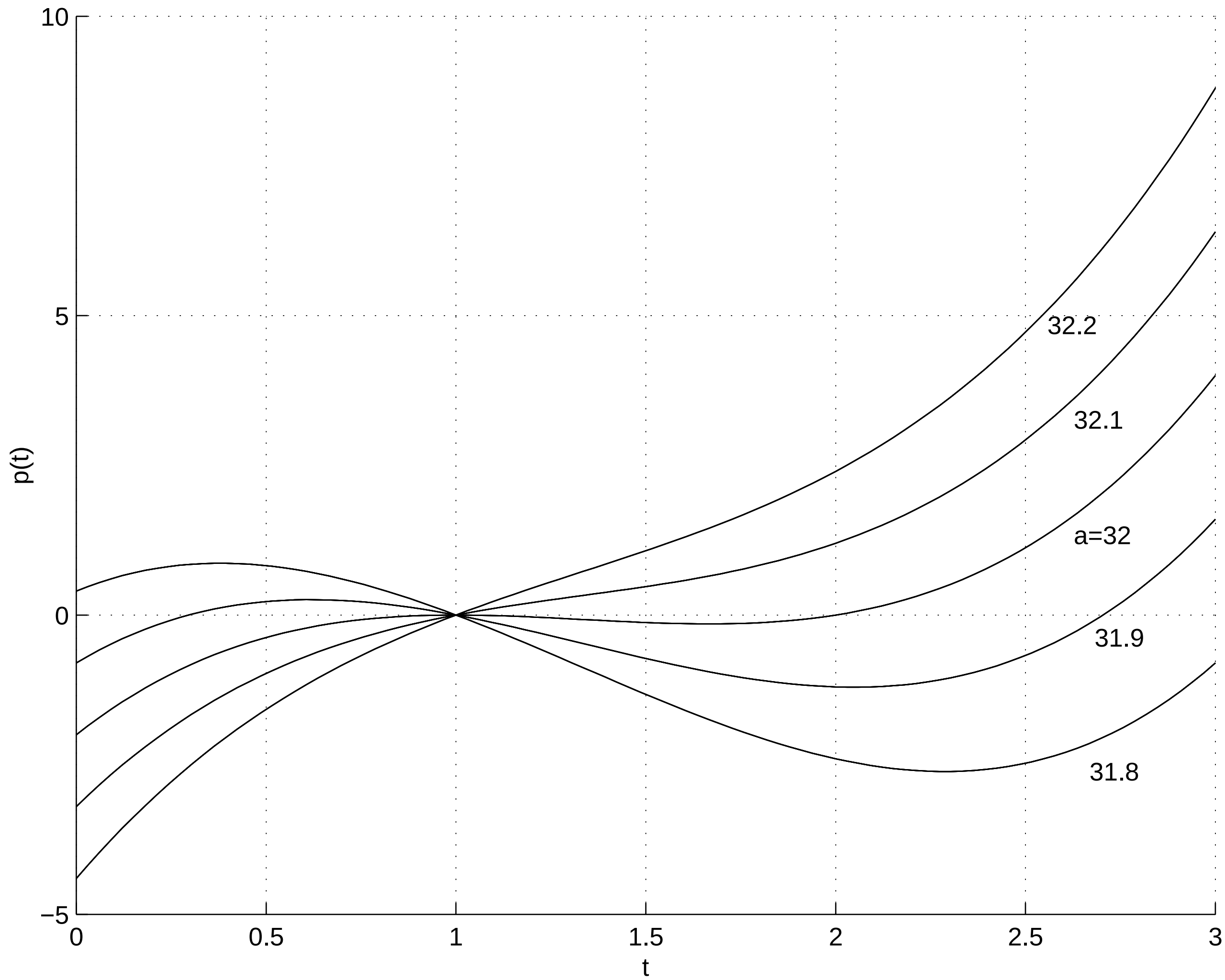

Figure 1: Polynôme caractéristique de la matrice A pour différentes valeurs du paramètre a.