Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 6

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & 0 & -3 \\ 4 & -12 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base pour Col A:

La matrice de droite nous indique que les colonnes pivot sont les colonnes 1 et 3. Une base pour Col A est donc formée par la première et la troisième colonne de A, soit

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Base pour Nul A:

Il suffit de trouver la solution générale du système homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en réduisant la matrice de droite sous forme échelon réduit.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient les équations suivantes:

$x_1 = 3x_2 \text{ -}3/2x_4$
$x_3 = \text{-}7/4x_4$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 - \frac{3x_4}{2} \\ x_2 \\ -\frac{7}{4}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Une base pour Nul A est donc donnée par les deux vecteurs suivants:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Il faut placer les quatre vecteurs dans une matrice et trouver une base pour l'espace des colonnes de cette matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 & -6 \\ -4 & 9 & -2 & -8 \\ 3 & -5 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & 12 \\ 0 & 4 & 8 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes pivot sont donc les colonnes 1 et 2. Une base pour Col A, et par le fait même une base pour le sous-espace engendré par les quatre vecteurs de l'énoncé du problème, est donnée par:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

3. a) La matrice est 8×5, donc $n = 5$. On a

$$\begin{gathered} \dim \operatorname{Nul} A + \dim \operatorname{Col} A = n \\ 2 + \dim \operatorname{Col} A = 5 \\ \dim \operatorname{Col} A = 3 \end{gathered}$$

b) La matrice est 4×5, donc $n = 5$. On a

$$\begin{gathered} \dim \operatorname{Nul} A + \operatorname{rang} A = n \\ 3 + \operatorname{rang} A = 5 \\ \operatorname{rang} A = 2 \end{gathered}$$

Note: dim Col A = rang A (théorème).

4. Il faut trouver c_1 et c_1 tels que $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\,\mathbf{b}_2 = \mathbf{x}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -10 \\ 7 & -1 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 17 & -34 \\ 0 & -31 & 62 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc c_2 = -2 et c_1 = (-2 + 8)/3 = 2.

6.

```
>>A

A =

     3     6     0     0   -18
     2    -1     5     2     5
    -5     8   -18     1   -23
     2    -5     9    -3    12

>>rref(A)

ans =

     1     0     2     0     0
     0     1    -1     0    -3
     0     0     0     1     1
     0     0     0     0     0
```

Les colonnes pivot sont les colonnes 1, 2 et 4. Une base pour Col A est donc:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La matrice sous forme échelon réduit nous donne aussi les équations:

$x_1 = -2x_3$
$x_2 = x_3 + 3x_5$
$x_4 = -x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 + 3x_5 \\ x_3 \\ -x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Une base pour Nul A est donc:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

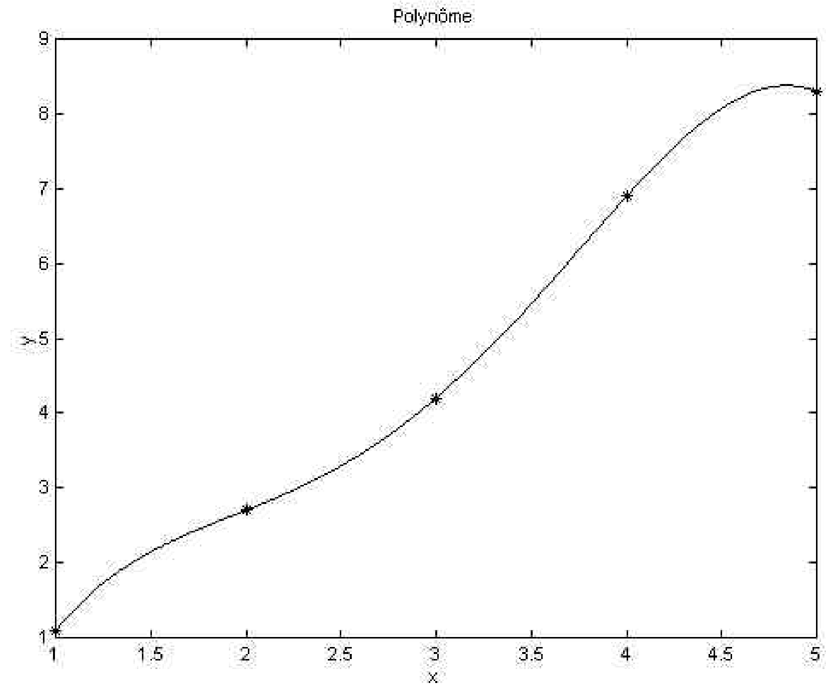
7.

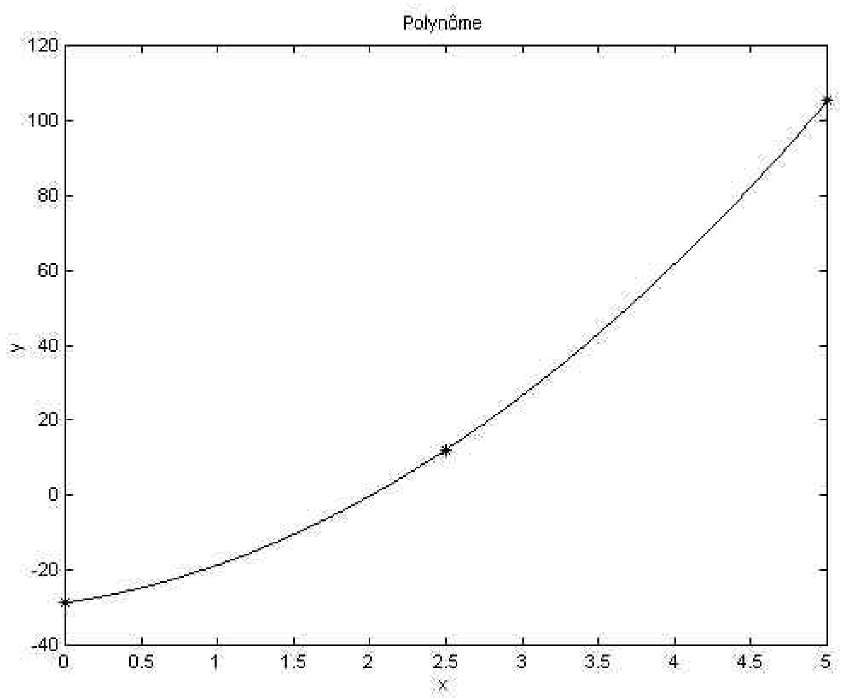
```
function p=dev6(x,y)

n=length(x)-1;% degré du polynôme
p=polyfit(x,y,n);
x1=linspace(x(1),x(n+1),1000);
y1=polyval(p,x1);

% Cas plus général: x1=linspace(min(x),max(x),1000);

plot(x,y,'*',x1,y1);
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Polynôme')
```

Exemples d'application:

```
>>x

x =

     1     2     3     4     5

>>y
```

```
y =

    1.1000    2.7000    4.2000    6.9000    8.3000

>>p=dev6(x,y)

p =

   -0.1583    1.8000   -6.8917   12.0500   -5.7000


>>x

x =

         0    2.5000    5.0000

>>y

y =

  -28.7000   12.1000 105.2000

>>p=dev6(x,y)

p =

    4.1840    5.8600 -28.7000
```


Polynôme
9
8
7
6
y 5
4
3
2
1
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
x


Polynôme
120
100
80
60
y 40
20
0
-20
-40
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
x