Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Devoir #7

5.3.16

Les valeurs propres sont 1, 2, 2.

$$(A-1I) = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une base correspond à la valeur propre $\lambda = 1$ est donc:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une base correspond à la valeur propre $\lambda = 2$ est donc:

$$\left\{ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

On a alors:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3.26

A n'est pas diagonalisable si le 3ème espace propre est de dimension 1. Dans ce cas, la somme des dimensions des espaces propres sera égale à 6, alors que *A* est une matrice 7×7 (d'après le théorème 7(b), p. 318 du livre ou 11.1.3(b) dans les notes).

5.3.34

```
A =

     4     4     2     3    -2
     0     1    -2    -2     2
     6    12    11     2    -4
     9    20    10    10    -6
    15    28    14     5    -3

>> eig(A)

ans =

    3.0000
    5.0000
    7.0000
    3.0000
    5.0000

>> A1=A-3*eye(5)

A1 =

     1     4     2     3    -2
     0    -2    -2    -2     2
     6    12     8     2    -4
     9    20    10     7    -6
    15    28    14     5    -6

>> A11=rref(A1)

A11 =
```

```
    1.0000         0         0   -2.0000    1.0000
         0    1.0000         0    1.5000   -0.5000
         0         0    1.0000   -0.5000   -0.5000
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
```

La base correspondant à la valeur propre $\lambda = 3$ est donc:

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

```
>> A22=rref(A-5*eye(5))

A22 =

    1.0000         0         0         0    1.0000
         0    1.0000    0.5000         0   -1.0000
         0         0         0    1.0000    1.0000
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
```

Pour la valeur propre $\lambda = 5$, on trouve la base:

$$\left\{ \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

```
>> A33=rref(A-7*eye(5))

A33 =

    1.0000         0         0         0   -0.3333
         0    1.0000         0         0         0
         0         0    1.0000         0         0
         0         0         0    1.0000   -1.0000
         0         0         0         0         0
```

Pour la valeur propre $\lambda = 7$, on trouve la base:

$$\mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

On a alors:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5.4.16

Les valeurs propres de A sont 0 et 5.

$$(A - 0I) = A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 5I) = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On trouve donc:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Une base pour $\mathbf{R}^2$ est donc:

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

5.4.18

S'il existe une base B telle que $[T]_B$ soit diagonale, alors A est similaire à une matrice diagonale. Dans ce cas, A aurait trois vecteurs propres linéairement indépendants. Toutefois, ce n'est pas nécessairement le cas, car A possède seulement 2 valeurs propres distinctes.

5.4.30

```
>> A=[-14 4 -14;-33 9 -31;11 -4 11];
>> P=[-1 -2 1;-1 -1 1;-1 -2 0]';
>> C=inv(P)*A*P

C =

    8    3   -6
    0    7    3
    0    0   -4
```

5.4.32

```
>> A=[15 -66 -44 -33;0 13 21 -15;1 -15 -21 12;2 -18 -22 8];
>> eig(A)

ans =

    5.0000
    4.0000
    2.0000
    4.0000

>> A2=rref(A-5*eye(4))

A2 =

    1.0000         0         0   -2.7500
         0    1.0000         0    0.7500
         0         0    1.0000   -1.0000
         0         0         0         0
```

La base correspondant à $\lambda = 5$ est:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
>> A3=rref(A-4*eye(4))

A3 =
```

```
    1.0000         0   10.0000  -13.0000
         0    1.0000    2.3333   -1.6667
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

La base correspondant à $\lambda = 4$ est:

$$\left\{ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -30 \\ -7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 39 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

```
>> A4=rref(A-2*eye(4))

A4 =

    1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0    1.5000
         0         0    1.0000   -1.5000
         0         0         0         0
```

La base correspondant à $\lambda = 2$ est:

$$\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La base que l'on recherche est donc:

$$B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$$

Exercice Matlab

```
function y=bessel2(u)

% Approximation pôlynimiale de la fonction de Bessel d'ordre 0

c=[-2.2499997 1.2656208 -0.3163866 0.0444479 -0.0039444 0.00021];

u=u/3;

y=1+c(1)*u.^2+c(2)*u.^4+c(3)*u.^6+c(4)*u.^8+c(5)*u.^10+c(6)*u.^12;
```

```
function bess2

u1=linspace(0,3,1000);
u2=linspace(0,3,10);

y1=bessel2(u1);
y2=besselj(0,u2);
y3=besselj(0,u1);

subplot(2,1,1)
plot(u2,y2,'o',u1,y1)
ylabel('Jo(x)')
xlabel('x')

subplot(2,1,2)
plot(u1, y1-y3)
ylabel('Erreur')
xlabel('x')
```