Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 7

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 = (-3) \cdot \left(5\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} + 0 + 4\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-3) \cdot [(5 \cdot 2) + (4 \cdot (-2))] = -6$$

2.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

La deuxième matrice est obtenue de la première en additionnant la ligne 2 à la ligne 1. Selon le théorème, le déterminant est inchangé.

$$\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$$

3.

a) Vrai. Selon le théorème, le premier échange de lignes ne change que le signe du déterminant. Le second échange de lignes annule l'effet du premier échange.

b) Faux. C'est cependant vrai pour une matrice triangulaire.

c) Faux. Les conditions énumérées ne décrivent que certains cas où det $A = 0$.

d) Faux. Voir le théorème sur det A^T.

4.

$$\det(A+B) = \det\begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{bmatrix} = 1 + a + d + ad - bc$$

$$\det A + \det B = 1 + (ad - bc)$$
$$\det(A + B) - (\det A + \det B) = a + d$$

Donc

$$\det(A + B) = (\det A + \det B) = 0 \text{ si et seulement si } a + d = 0.$$

5.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \left(-\frac{1}{9}\right)\begin{bmatrix} -9 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

6.

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

L'aire du parallélogramme est donc égale à $4 \times 5 = 20$.

<u>Autre méthode:</u>

On utilise le théorème avec la matrice des vecteurs $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ transformés.

$$\text{aire} = \left|\det A\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} 14 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right| = 20$$

7.

a) Le tétraèdre ayant comme sommets 0, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ est l'image de S selon la transformation linéaire T telle que $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2$ et $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$. La matrice standard pour T est $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$.

b) {volume de S} = (1/3){aire de la base}{hauteur} = 1/6, puisque les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ sont de longueur unitaire.

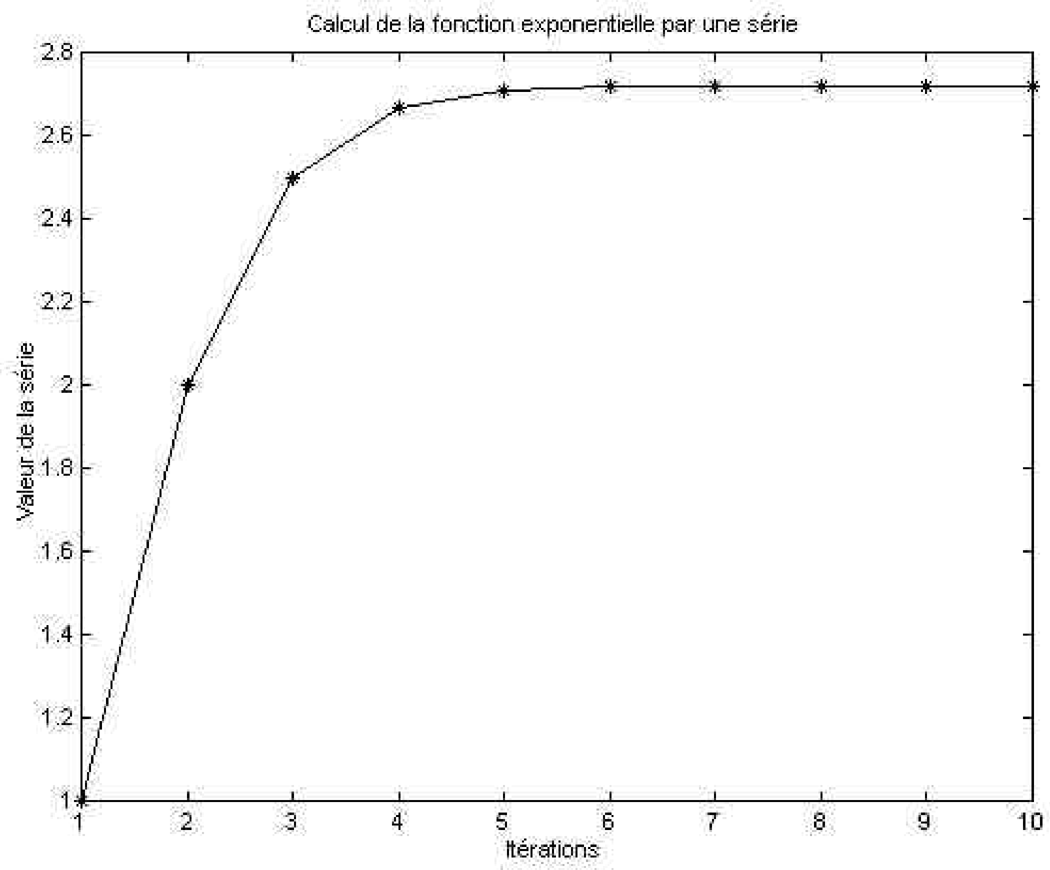
{volume de S'} = $|\det A|(1/6) = (1/6)\,|\det[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3]|$.

8.

```
function y=dev7(x,n)

% Calcul de la fonction exponentielle par une série
% n = nombre de termes dans la série
y=ones(size(x)); % vecteur de "1" de la taille de x
a=1;
z=ones(size(x));
for i=1:n-1,
   a=a*i; % Calcul de la factorielle
   y=y+(x.^i)/a;
   z(i+1)=y(1);
end
plot([1:n],z,'-*')
xlabel('Itérations')
ylabel('Valeur de la série')
title('Calcul de la fonction exponentielle par une série')
```

Exemple d'application:

```
>>dev7([1 2.5 4], 10)

ans =

    2.7183   12.1791   54.1541

>>exp([1 2.5 4])

ans =

    2.7183   12.1825   54.5982
```



On peut aussi réaliser cette fonction sans boucle “for”.

```
function y=dev7b(x,n)

% Calcul de la fonction exponentielle par une série
% n = nombre de termes dans la série
z=ones(n,1)*x;
s=[0:n-1]'*ones(1,length(x));
z=(z.^s)./gamma(s+1);
y=sum(z);
plot([1:n],cumsum(z(:,1)),'-*')
xlabel('Itérations')
ylabel('Valeur de la série')
title('Calcul de la fonction exponentielle par une série')
```