Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 8

1.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Trouvons la solution du système (A - 3I)$\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 et x_3 sont des variables libres. Les équations donnent:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Une base pour l'espace propre correspondant à la valeur propre 3 est donnée par les vecteurs

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.

a) Faux. Le vecteur $\mathbf{x}$ dans l'équation $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ doit être non nul.

b) Faux. Voir l'exemple 4 à la page 299 du livre.

c) Vrai. Si A est une matrice stochastique et que $\mathbf{q}$ est le vecteur correspondant au régime permanent, alors $A\mathbf{q} = \mathbf{q}$, i.e. $A\mathbf{q} = 1\mathbf{q}$.

d) Faux. C'est vrai pour des matrices *triangulaires*.

e) Vrai. Voir le texte dans le livre à la page 298 après l'exemple 3. L'espace propre de λ est le noyau de la matrice $A - \lambda I$.

3.

```
>>A

A =

     9    -4    -2    -4
   -56    32   -28    44
   -14   -14     6   -14
    42   -33    21   -45

>>eig(A)

ans =

   13.0000
  -12.0000
  -12.0000
   13.0000

>>rref(A-13*eye(4))

ans =

    1.0000         0    0.5000   -0.3333
         0    1.0000         0    1.3333
         0         0         0         0
         0         0         0         0

>>rref(A+12*eye(4))

ans =

    1.0000         0   -0.2857         0
         0    1.0000   -1.0000    1.0000
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

Pour $\lambda = 13$ on a:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ -\frac{4}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base pour l'espace propre correspondant à $\lambda = 13$ est

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou, pour n'avoir que des entiers, } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda = 12$ on a:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3,5}x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{3,5} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La base pour l'espace propre correspondant à $\lambda = 12$ est

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3,5} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou, pour n'avoir que des entiers, } \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (7-\lambda)(3-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

La valeur propre (double) est 5.

5.

$$\det\left(\begin{bmatrix}0&3&1\\3&0&2\\1&2&0\end{bmatrix}-\lambda I\right) = \det\left(\begin{bmatrix}-\lambda&3&1\\3&-\lambda&2\\1&2&-\lambda\end{bmatrix}\right) = -\lambda\left|\begin{bmatrix}-\lambda&2\\2&-\lambda\end{bmatrix}\right| - 3\left|\begin{bmatrix}3&2\\1&-\lambda\end{bmatrix}\right| + 1\left|\begin{bmatrix}3&-\lambda\\1&2\end{bmatrix}\right|$$

$$= -\lambda(\lambda^2-4) - 3(-3\lambda-2) + (6+\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda + 9\lambda + 6 + 6 + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 14\lambda + 12$$

6.

a) Faux. La valeur absolue de det *A* est égale au volume.

b) Faux. A et AT ont le même déterminant.

c) Vrai. Voir le texte juste avant l'exemple 4 à la page 308 du livre.

d) Faux. Voir le texte juste après le théorème 4 à la page 308 du livre.

7.

```
>>A=rand(4)

A =

    0.9501    0.8913    0.8214    0.9218
    0.2311    0.7621    0.4447    0.7382
    0.6068    0.4565    0.6154    0.1763
    0.4860    0.0185    0.7919    0.4057

>>U=Gauss(A,1)

U =

    0.9501    0.8913    0.8214    0.9218
         0    0.5453    0.2449    0.5140
         0   -0.1128    0.0908   -0.4125
   -0.0000   -0.4374    0.3718   -0.0658

>>U=Gauss(U,2)

U =

    0.9501    0.8913    0.8214    0.9218
         0    0.5453    0.2449    0.5140
```

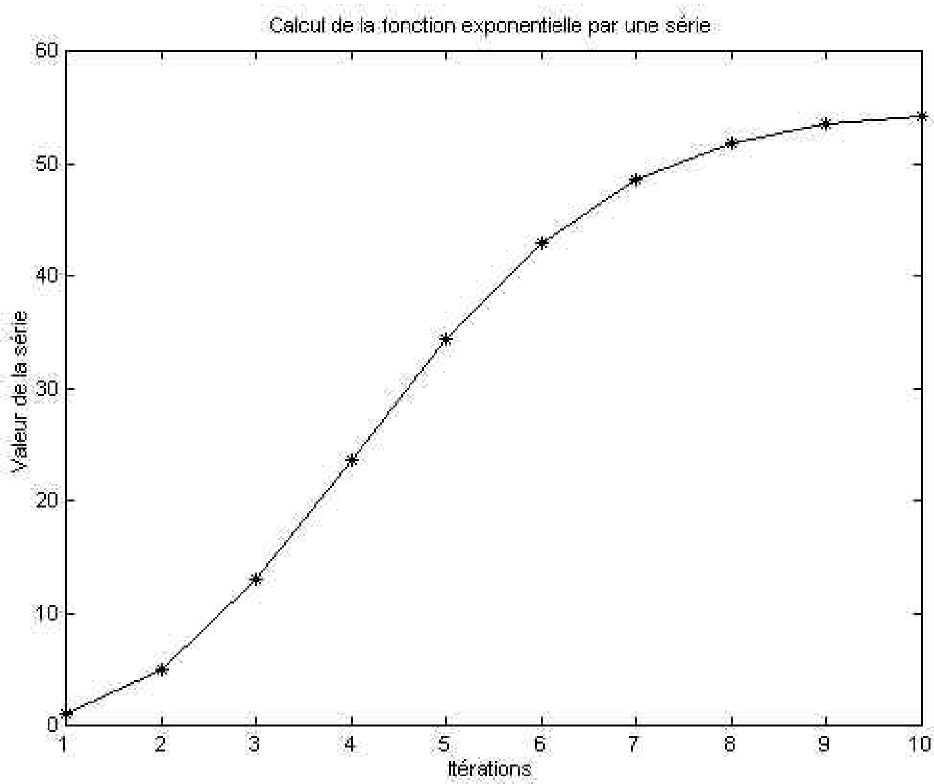
```
         0         0    0.1415   -0.3062
   -0.0000    0.0000    0.5682    0.3465

>>U=Gauss(U,3)

U =

    0.9501    0.8913    0.8214    0.9218
         0    0.5453    0.2449    0.5140
         0         0    0.1415   -0.3062
   -0.0000    0.0000    0.0000    1.5763

>>prod(diag(U))

ans =

    0.1155

>>eig(A)

ans =

   2.3230
   0.0914 + 0.4586i
   0.0914 - 0.4586i
   0.2275

>>prod(ans)

ans =

   0.1155 - 0.0000i

>>det(A)

ans =

    0.1155
```

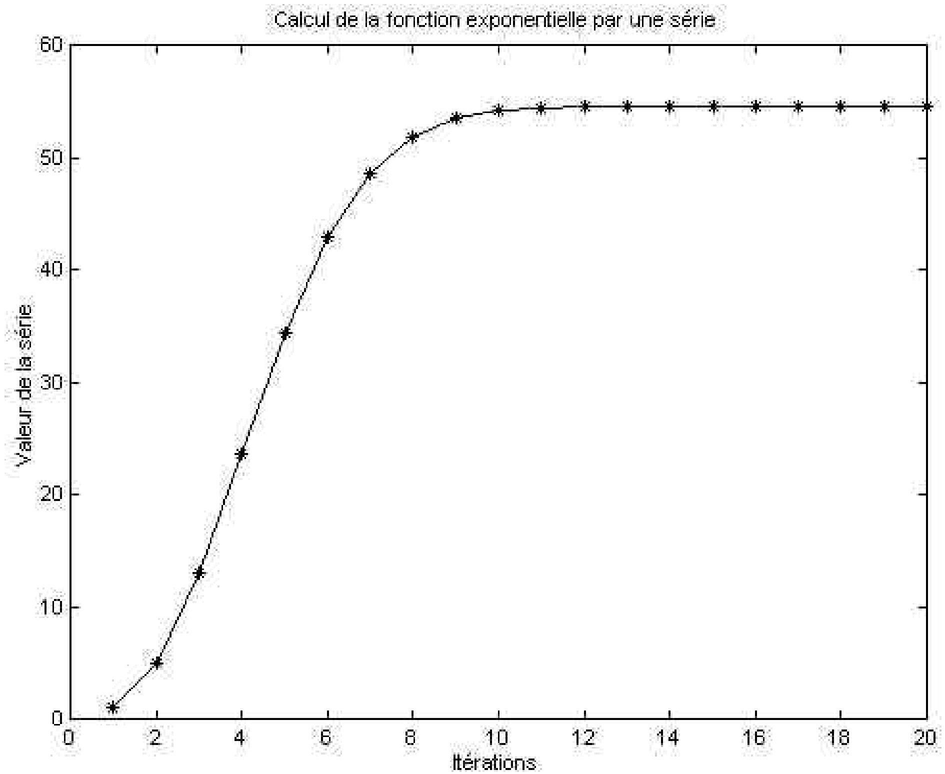
Conclusion: on obtient la même réponse, du moins avec une précision de quatre chiffres après le point décimal.

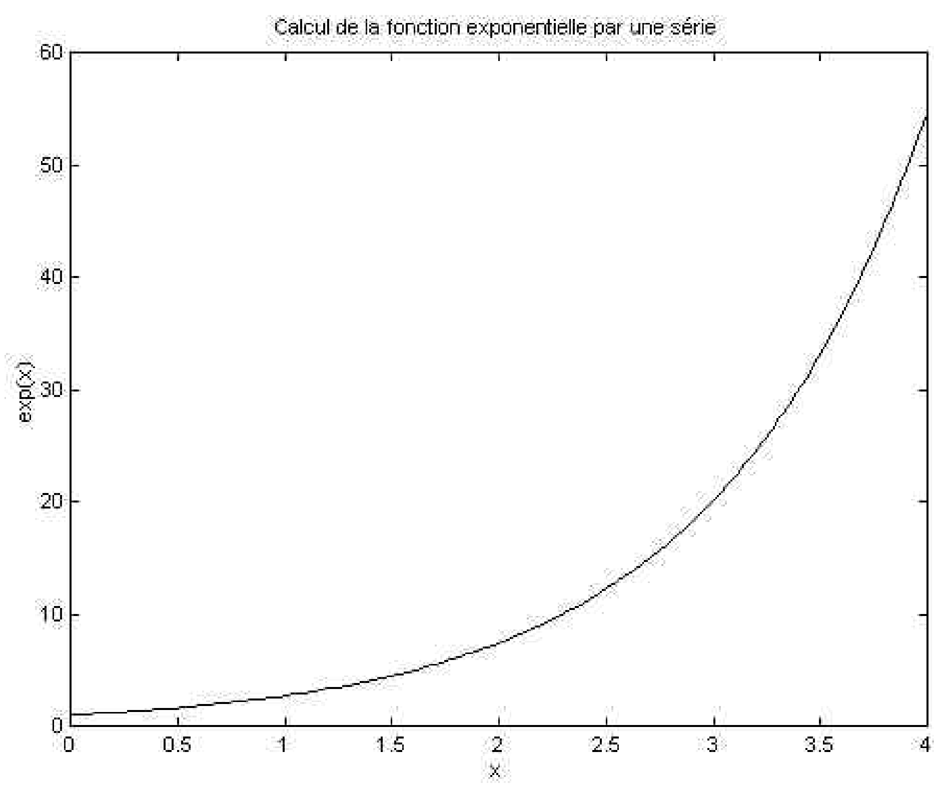
8.

```
Function y=dev8(x,n)

% Calcul de la fonction exponentielle par une série
% n = nombre de termes dans la série

if (nargin==1)
   n=10;
end

y=ones(size(x)); % vecteur de "1" de la taille de x
a=1;
z=y;
for i=1:n-1,
   a=a*i; % Calcul de la factorielle
   y=y+(x.^i)/a;
   z(i+1)=y(1);
end

if(length(x)==1)
   plot([1:n],z,'-*')
   xlabel('Itérations')
   ylabel('Valeur de la série')
   title('Calcul de la fonction exponentielle par une série')
else
   plot(x,y)
   xlabel('x')
   ylabel('exp(x)')
   title('Calcul de la fonction exponentielle par une série')
end

>>dev8(4)

ans =

   54.1541

>>dev8(4,20)
```

```
ans =

   54.5981

>>x=linspace(0,4);
>>y=dev8(x,20);
```




Calcul de la fonction exponentielle par une série
Valeur de la série
Itérations


Calcul de la fonction exponentielle par une série
exp(x)
x