Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Devoir #9

6.1.14

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{z}\| = \|(4, -4, -6)\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 6^2} = 2\sqrt{17}$$

6.1.24

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + (-2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + (-2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

D'où:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

6.1.30

a) Si $\mathbf{z}$ est dans $W^{\perp}$, $\mathbf{u}$ est dans W, et c est un scalaire quelconque, alors:

$$(c\mathbf{z}) \cdot \mathbf{u} = c(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}) = c0 = 0$$

Puisque $\mathbf{u}$ est n'importe quel élément de W, alors $c\mathbf{z}$ est dans $W^{\perp}$.

b) Prenons $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ quelconques dans $W^{\perp}$. Alors, pour n'importe quel $\mathbf{u}$ dans W:

$$(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{u} = 0 + 0 = 0$$

Ceci montre que $\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2$ est dans $W^{\perp}$.

c) $\mathbf{0}$ est de manière évidente dans $W^{\perp}$, car $\mathbf{0}$ est orthogonal à n'importe quel vecteur. Ce fait, conjointement avec (a) et (b), montre que $W^{\perp}$ est un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.

6.2.12

Soit $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -4,\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 10.$$

La projection orthogonale de **y** sur **u** est:

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}\mathbf{u} = -\frac{4}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

6.2.16

La projection orthogonale de **y** sur **u** est:

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u})}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}\mathbf{u} = \frac{15}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La distance entre **y** et la droite passant par **u** et l'origine est donc la distance entre **y** et la projection orthogonale de **y** sur **u**, soit:

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| = \|(-6, 3)\| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

6.2.22

On a:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = -\frac{2}{3\sqrt{18}} + \frac{4}{3\sqrt{18}} - \frac{2}{3\sqrt{18}} = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = -\frac{2}{3\sqrt{2}} + 0 + \frac{2}{3\sqrt{2}} = 0$$

Donc $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est une base orthogonale.

De plus:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{1}{18} + \frac{16}{18} + \frac{1}{18} = 1$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

Donc $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont des vecteurs unitaires, et $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est une base orthonormale.

6.2.32

Si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, alors par le Théorème 1(c) dans la section 6.1:

$$(c_1\mathbf{v}_1) \cdot (c_2\mathbf{v}_2) = c_1[\mathbf{v}_1 \cdot (c_2\mathbf{v}_2)] = c_1c_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = c_1c_20 = 0$$

6.2.34

a) On trouve:

$$U^TU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$UU^T = 0.01\begin{bmatrix} 82 & 0 & -20 & 8 & 6 & 20 & 24 & 0 \\ 0 & 42 & 24 & 0 & -20 & 6 & 20 & -32 \\ -20 & 24 & 58 & 20 & 0 & 32 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 20 & 82 & 24 & -20 & 6 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 24 & 18 & 0 & -8 & 20 \\ 20 & 6 & 32 & -20 & 0 & 58 & 0 & 24 \\ 24 & 20 & 0 & 6 & -8 & 0 & 18 & -20 \\ 0 & -32 & 6 & 0 & 20 & 24 & -20 & 42 \end{bmatrix}$$

U^TU est une matrice 4×4, alors que UU^T est une matrice 8×8 et diffère totalement de la précédente.

b)

```
>> y=rand(8,1)

y =

    0.9501
```

```
    0.2311
    0.6068
    0.4860
    0.8913
    0.7621
    0.4565
    0.0185

>> p=U*(U'*y)

p =

    1.0121
    0.1956
    0.5596
    0.6848
    0.2550
    0.7473
    0.3106
    0.2401

>> z=y-p

z =

   -0.0619
    0.0356
    0.0472
   -0.1988
    0.6363
    0.0148
    0.1459
   -0.2216

>> z'*p

ans =

  -1.9429e-16
```

p est dans Col U car $\mathbf{p} = U(U^T\mathbf{y})$. Étant donné que les colonnes de U sont égales à un facteur près aux colonnes de A, Col U = Col A. Donc **p** est dans Col A.

c)

```
>> U'*z
```

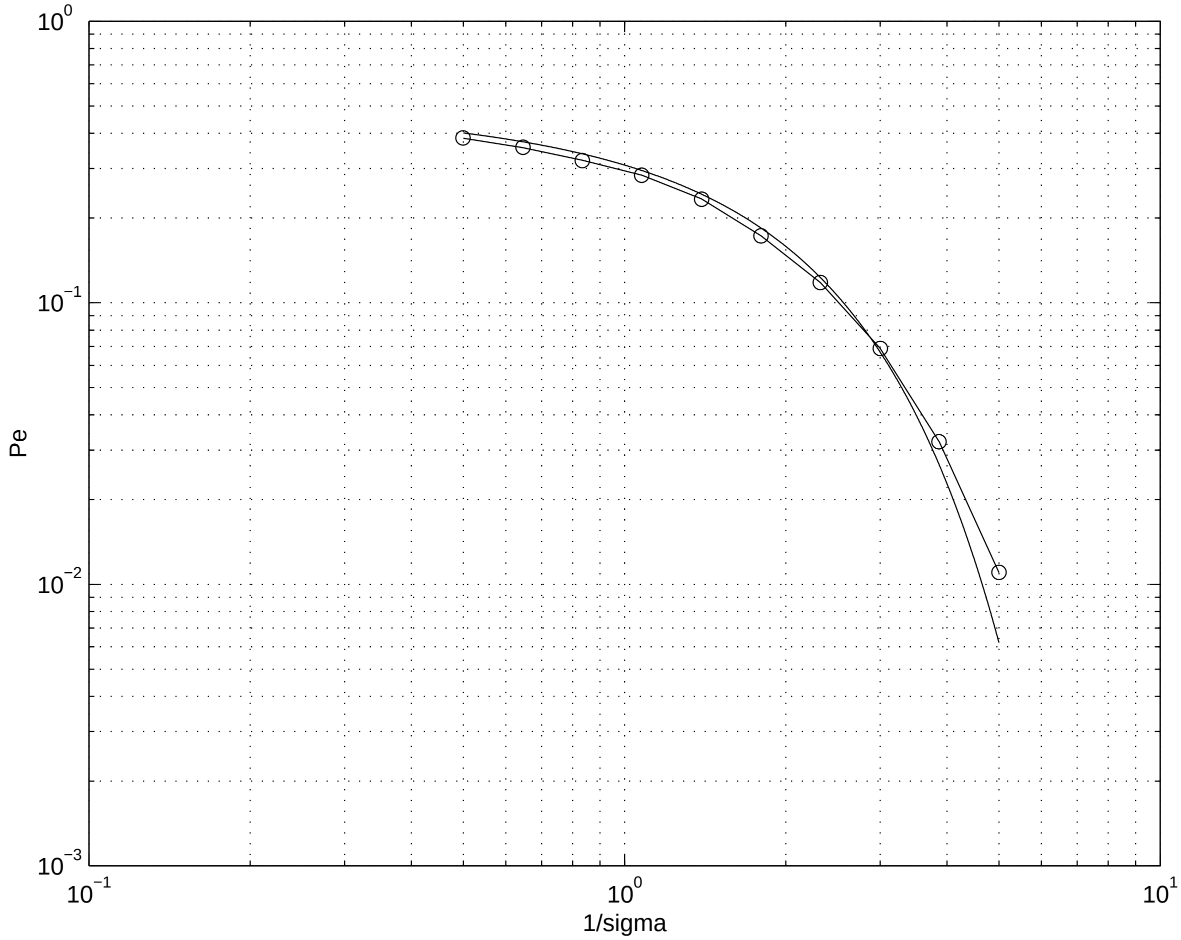
```
ans =

   1.0e-15 *

   -0.0173
    0.0486
   -0.1110
   -0.0278
```

d) D’après (c), **z** est orthogonal à chacune des colonnes de A. **z** doit être orthogonal à chaque vecteur dans Col A; donc **z** est dans $(\mathrm{Col} A)^{\perp}$.

Exercice Matlab

Dans ce script Matlab, je n’ai pas utilisé une boucle “for”. L’instruction `b=randn(1,n)'*sigma` crée une matrice 1000×10 dont les colonnes contiennent le bruit pour différentes valeur de σ. De même, `s=rand(1,n)'*ones(1,size(sigma,2))`crée une matrice avec 10 colonnes identiques, chacune contenant le signal à transmettre. L’instruction `y=sum(xor(s,rr))/n` fait la somme selon les colonnes. `y` est donc un vecteur ligne de 10 éléments.

```
% simul.m
% Simule un système de communication binaire

sigma=logspace(log10(0.2), log10(2), 10);
sigma2=logspace(log10(0.2), log10(2), 1000);

u=2*sqrt(2)*sigma2;
z=0.5*erfc(1./u); % Calcul théorique de Pe

n=1000;
b=randn(1,n)'*sigma; % Génération du bruit
s=rand(1,n)'*ones(1,size(sigma,2)); % Génération du signal

s=s>0.5; % Pour avoir un signal binaire "0" "1"
r=s+b; % Signal reçu
rr=r>0.5; % Quantification binaire pour estimer le signal reçu

y=sum(xor(s,rr))/n; % Calcul du taux d'erreur

% Affichage logarithmique
loglog(1./sigma2,z,1./sigma,y,1./sigma,y,'o')
xlabel('1/sigma')
ylabel('Pe')
grid
```


10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
Pe
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
1/sigma