Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 9

1. Trouvons d'abord les valeurs propres.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -16 & 4 \\ 6 & 13-\lambda & -2 \\ 12 & 16 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 5-\lambda \\ 6 & 13-\lambda & -2 \\ 12 & 16 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\{(13-\lambda)(1-\lambda)+32\} + (5-\lambda)\{96-156+12\lambda\}$$

$$= (5-\lambda)\{\lambda^2 - 13\lambda - \lambda + 13 + 32 + 96 - 156 + 12\lambda\}$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 15) = (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda) + 3$$

Les valeurs propres sont donc 5, 5 et -3. Trouvons l'espace propre correspondant à la valeur propre 5.

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -12 & -16 & 4 \\ 6 & 8 & -2 \\ 12 & 16 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -12 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'espace propre est donc défini par $x_1 = -(4/3)x_2 + (1/3)x_3$, i.e.

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ ou encore } \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Le troisième vecteur propre, correspondant à la valeur propre -3, est donné dans l'énoncé du problème. On a donc:

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Si A a n vecteurs propres linéairement indépendants, alors $A = PDP^{-1}$. On peut donc écrire:

$$A^T = (PDP^{-1})^T = (\mathrm{P}^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D P^T = QDQ^{-1}$$

où $Q = (P^T)^{-1}$. Ceci implique que A^T est diagonalisable et donc que les colonnes de Q sont les vecteurs propres de A^T.

3.

```
>>A

A =

     0    13     8     4
     4     9     8     4
     8     6    12     8
     0     5     0    -4

>>eig(A)

ans =

   -4.0000
   24.0000
    1.0000
   -4.0000

>>rref(A+4*eye(4))

ans =

     1     0     2     1
     0     1     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

>>rref(A-24*eye(4))

ans =

    1.0000         0         0   -5.6000
         0    1.0000         0   -5.6000
         0         0    1.0000   -7.2000
         0         0         0         0

>>rref(A-eye(4))

ans =

     1     0     0    -1
     0     1     0    -1
```

```
0      0      1      2
0      0      0      0
```

Les valeurs propres sont -4, -4, 24, 1. Les 2 vecteurs propres correspondant à -4 sont

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur propre correspondant à 24 est

$$\begin{bmatrix} 5,6 \\ 5,6 \\ 7,2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ ou encore } \begin{bmatrix} 28 \\ 28 \\ 36 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Le vecteur propre correspondant à 1 est

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On obtient donc:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 28 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & 1 \\ 1 & 0 & 36 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. On a $\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2$, soit $[\mathbf{x}]_B = (3\ -4\ 0)'$. $[T(\mathbf{x})]_B = [T]_B[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -20 \\ 11 \end{bmatrix}$. Donc

$T(3\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2) = 24\mathbf{b}_1 - 20\mathbf{b}_2 + 11\mathbf{b}_3$.

5. a) Pour tout **p** et **q** dans $\mathbf{P}_3$ et pour tout scalaire c on a:

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}+\mathbf{q})(-3) \\ (\mathbf{p}+\mathbf{q})(-1) \\ (\mathbf{p}+\mathbf{q})(1) \\ (\mathbf{p}+\mathbf{q})(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-3) \\ \mathbf{p}(-1) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}(-3) \\ \mathbf{q}(-1) \\ \mathbf{q}(1) \\ \mathbf{q}(3) \end{bmatrix} = T(\mathbf{p}) + T(\mathbf{q})$$

$$T(c\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} (c\mathbf{p})(-3) \\ (c\mathbf{p})(-1) \\ (c\mathbf{p})(1) \\ (c\mathbf{p})(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-3) \\ \mathbf{p}(-1) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(3) \end{bmatrix} = cT(\mathbf{p})$$

b) $M = [[T(1)]\ \ [T(t)]\ \ [T(t^2)]\ \ [T(t^3)]] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & (-3)^2 & (-3)^3 \\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 1 & (1)^2 & (1)^3 \\ 1 & 3 & (3)^2 & (3)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$

6. Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$. Si B est similaire à A alors $B = QAQ^{-1}$. On a donc:

$$B = Q(PDP^{-1})Q^{-1} = (QP)D(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)D(QP)^{-1}.$$

Ceci prouve que B est diagonalisable.

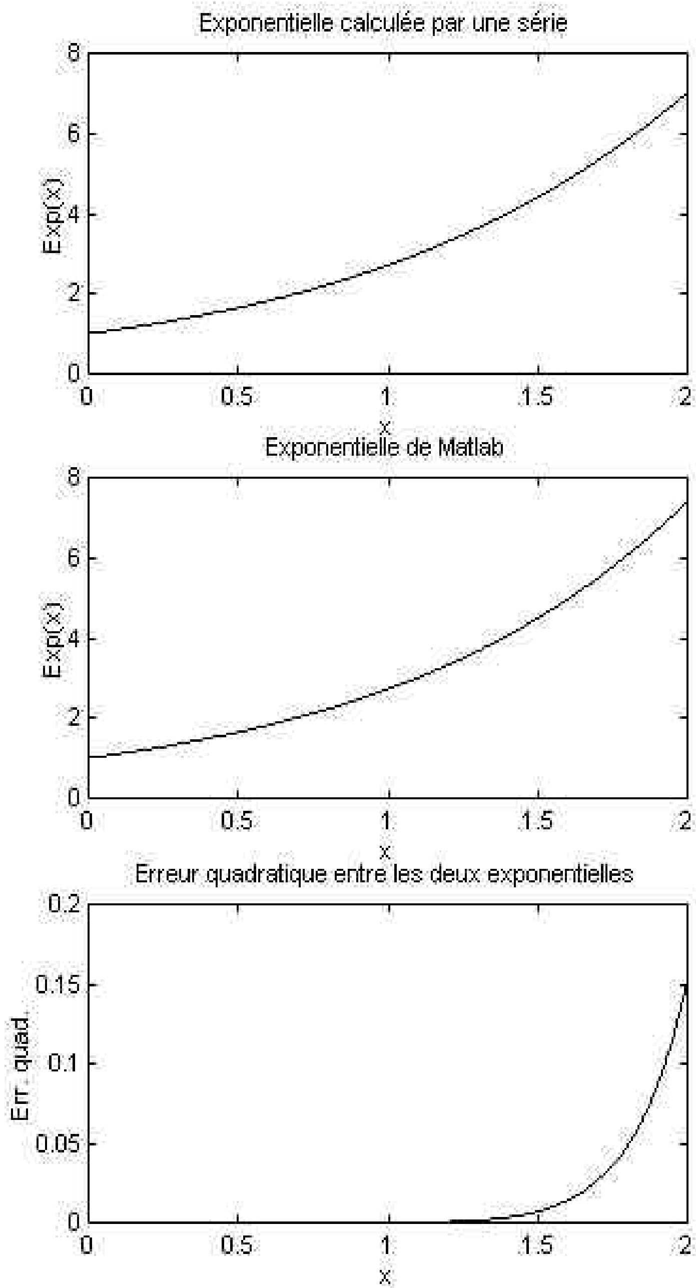
7.
```
>>A

A =

    -7   -48   -16
     1    14     6
    -3   -45   -19

>>P=[b1 b2 b3]

P =

    -3    -2     3
     1     1    -1
    -3    -3     0

>>C=inv(P)*A*P

C =

   -7.0000   -2.0000   -6.0000
         0   -4.0000   -6.0000
    0.0000         0   -1.0000
```

8.

```
function y=dev99(x,n)

% Calcul de la fonction exponentielle par une série
% n = nombre de termes dans la série
y=ones(size(x)); % vecteur de "1" de la taille de x
a=1;
z=ones(size(x));
for i=1:n-1,
   a=a*i; % Calcul de la factorielle
   y=y+(x.^i)/a;
   z(i+1)=y(1);
end
y1=exp(x);
subplot(3,1,1)
plot(x,y)
xlabel('x')
ylabel('Exp(x)')
title('Exponentielle calculée par une série')

subplot(3,1,2)
plot(x,y1)
xlabel('x')
ylabel('Exp(x)')
title('Exponentielle de Matlab')

subplot(3,1,3)
plot(x,(y-y1).^2)
xlabel('x')
ylabel('Err. quad.')
title('Erreur quadratique entre les deux exponentielles')
```

Exemple d'utilisation:

```
>>x=linspace(0,2,1000);
>>y=dev99(x,5);
```


Exponentielle calculée par une série
Exp(x)
x
Exponentielle de Matlab
Exp(x)
x
Erreur quadratique entre les deux exponentielles
Err. quad.
x
0
0.5
1
1.5
2
0.05
0.1
0.15
0.2
4
6
8