Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 10

1. a) 6.1.16

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 24 - 9 - 15 = 0$$

$\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux.

b) 6.1.18

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = -3 - 56 + 60 + 0 = 1 \neq 0$$

$\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ ne sont pas orthogonaux.

2. a) 6.1.27

$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 = 0$$

b) 6.1.29

Soit $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p \in W$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{x} \cdot (c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p) \\ &= c_1(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1) + \ldots + c_p(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_p) \\ &= c_1 \cdot 0 + \ldots + c_p \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc, $\mathbf{x}$ est orthogonal à tout $\mathbf{w} \in W$.

c) 6.1.31

Soit $\mathbf{x} \in W$ et $\mathbf{x} \in W^{\perp}$.

Si $\mathbf{x} \in W^{\perp}$, alors $\mathbf{x} \perp \mathbf{w}$ pour tout $\mathbf{w} \in W$. En particulier, $\mathbf{x} \perp \mathbf{x}$. Or, le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur $\mathbf{0}$. Donc $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3.

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{25 + 4 + 64} = \sqrt{93}$$

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{61}$$

$$\text{dist }(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

$$= \sqrt{81 + 16 + 121}$$

$$= \sqrt{218}$$

4. 6.2.26

Soit $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ des vecteurs non nuls et orthogonaux qui engendrent W. Selon le théorème 4, p. 379 du livre de Lay, ces vecteurs sont linéairement indépendants. Selon le théorème sur les matrices inversibles, p. 230 du livre de Lay, ces vecteurs génèrent (donc sont une base pour) $\mathbf{R}^n$.

Si $W = \text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, alors $W = \mathbf{R}^n$.

5. 6.2.29

Si U et V sont des matrices orthogonales, alors $U^{-1} = U^T$ et $V^{-1} = V^T$.

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} = U^TV^T = (UV)^T$$

Donc, UV est une matrice orthogonale.

6.

```
A =

    0.5000    0.5000    0.5000    0.5000
    0.5000    0.5000   -0.5000   -0.5000
    0.5000   -0.5000    0.5000   -0.5000
    0.5000   -0.5000   -0.5000    0.5000

>>A'*A
```

```
ans =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

7.

```
function X=dev10(A,b,x0,t)

d=diag(A);
D=diag(d);
N=D-A;
x=x0;
X=x;

y=(N*x+b)./d;
X=[X y];

while norm(x-y) > t
   x=y;
   y=(N*x+b)./d;
   X=[X y];
end

m=size(X,2);
plot([0:m-1],X);

xlabel('k')
ylabel('x_k')
```

Exemple d'utilisation

```
>>A

A =

    10     2     5
    -3     7     1
     1     2     5

>>b'

ans =
```

```
     2     4     6

>>x0'

ans =

     0     0     0

>>X=dev10(A,b,x0,0.0001)

X =

 Columns 1 through 7

         0    0.2000   -0.5143   -0.3629   -0.3979   -0.4442   -0.4346
         0    0.5714    0.4857    0.2180    0.2576    0.2316    0.2130
         0    1.2000    0.9314    1.1086    1.1854    1.1766    1.1962

 Columns 8 through 14

   -0.4407   -0.4437   -0.4434   -0.4441   -0.4443   -0.4443   -0.4444
    0.2143    0.2109    0.2095    0.2093    0.2090    0.2089    0.2088
    1.2017    1.2024    1.2044    1.2049    1.2051    1.2053    1.2053
```