Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 1

1.2.18)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & h+8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & h+12 \\ 0 & 1 & h+8 \end{bmatrix}$$

Ce système a une solution $\forall h$.

1.3.26)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 10 \\ -1 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est la forme échelon réduit. Ce système possède une infinité de solutions. Donc, $\mathbf{b} \in W$.

1.4.40)

```
>>A

A =

     5    -7    -4     9
     6    -8    -7     5
     4    -4    -9    -9
    -9    11    16     7

>>rref(A)

ans =

    1.0000         0         0    1.3333
         0    1.0000         0   -1.6667
         0         0    1.0000    2.3333
         0         0         0         0
```

Comme A ne possède que 3 colonnes pivot, ses colonnes n'engendrent pas $\mathbf{R}^4$.

1.5.14)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 3x_3 = -8$
$x_3 - 5x_3 = 4$
x_3 est libre

$x_1 = -8 - 3x_3$
$x_2 = 4 + 5x_3$
$x_3 = 0 + x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution est une droite passant par $\begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ et parallèle à la solution du système de l'exercice 6.

1.6.42)

```
>>A

A =

    12    10    -6    -3     7    10
    -7    -6     4     7    -9     5
     9     9    -9    -5     5    -1
    -4    -3     1     6    -8     9
     8     7    -5    -9    11    -8

>>rref(A)

ans =
```

```
     1     0     2     0     2     0
     0     1    -3     0    -2     0
     0     0     0     1    -1     0
     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     0     0     0
```

On observe que les colonnes 1, 2, 4 et 6 sont les colonnes pivot. On construit donc *B* à partir ce ces colonnes, parce quelles sont linéairement indépendantes.

```
>>B=A(:,[1 2 4 6])

B =

    12    10    -3    10
    -7    -6     7     5
     9     9    -5    -1
    -4    -3     6     9
     8     7    -9    -8

>>rref(B)

ans =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0

>>z=[0 0 0 0 0]'

z =

     0
     0
     0
     0
     0

>>B\z
```

```
ans =

     0
     0
     0
     0
```

1.6.44)

On prend la 5e colonne de *B*.

```
>>v=A(:,5)

v =

     7
    -9
     5
    -8
    11

>>B\v

ans =

    2.0000
   -2.0000
   -1.0000
   -0.0000
```

On peut aussi faire.

```
>>rref([B,v])

ans =

     1     0     0     0     2
     0     1     0     0    -2
     0     0     1     0    -1
     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0
```

Chaque colonne de *A* qui n'est pas une colonne de *B* est dans l'ensemble engendré par les colonnes de *B*. En effet, la matrice originale *A* possède 4 colonnes pivot. Si on enlève à *A* une ou plus d'une colonne, la matrice résultante aura au plus 4 colonnes pivot. Si **v** est une colonne de *A* qui n'est pas dans *B*, alors la réduction de la matrice augmentée [*B* **v**] démontre que seuls les quatre premières colonnes de [*B* **v**] sont des colonnes pivot, ce qui implique que l'équation $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ a une solution.

1.9.6)

$$
\begin{aligned}
5I_1 - 2I_2 &= 40 \\
-2I_1 + 7I_2 - 2I &= 30 \\
-2I_2 + 9I_3 - 2I_4 &= 20 \\
-2I_3 - 2I_2 + 11I_4 &= 10
\end{aligned}
$$

```
R =

     5    -2     0     0
    -2     7    -2     0
     0    -2     9    -2
     0     0    -2    11


V =

    40
    30
    20
    10

>>R\V

ans =

   11.5596
    8.8991
    4.5872
    1.7431
```

1.9.10)

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800000 \\ 500000 \end{bmatrix}$$

Après 1 an:

Ville: $r_0 \begin{bmatrix} 0{,}94 \\ 0{,}06 \end{bmatrix}$

Banlieue: $s_0 \begin{bmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}96 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} 0{,}94 \\ 0{,}06 \end{bmatrix} + s_0 \begin{bmatrix} 0{,}94 \\ 0{,}06 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}94 & 0{,}04 \\ 0{,}06 & 0{,}96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

$$= A\mathbf{x_0}$$

Après 2 ans:

$$\mathbf{x_2} = A\mathbf{x_1} = A^2\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 746800 \\ 553200 \end{bmatrix}$$

Problème Matlab

Voici le script Matlab.

```
%dev1.m

x=[0:0.01:5];
y=exp(-0.5*x).*sin(10*x);
plot(x,y)
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Voici la figure obtenue.