Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie
P. Fortier

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 3

2.4.9)

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ X & I & 0 \\ Y & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ XA_{11}+A_{21} & XA_{12}+A_{22} \\ YA_{11}+A_{31} & YA_{12}+A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix}$$

$B_{11} = A_{11}$
$B_{12} = A_{12}$

$XA_{11} + A_{21} = 0$, $X = -A_{21}A_{11}^{-1}$

$XA_{12} + A_{22} = B_{22}$, $B_{22} = -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22}$

$Y A_{31} = 0$, $Y = -A_{31}A_{11}^{-1}$

$YA_{12} + A_{32} = B_{32}$, $B_{32} = -A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{32}$

2.4.15)

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ XA_{11} & S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ XA_{11} & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = A_{11}$

$A_{11}Y = A_{12}$, $Y = A_{11}^{-1}A_{12}$

$XA_{11} = A_{21}$, $X = A_{21}A_{11}^{-1}$

Vérification:

$XA_{11}Y + \mathrm{S} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{11}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = A_{22}$

2.4.23)

a)

```
>>A=rand(20,30);

>>A(15:20,5:10)

ans =

    0.2987    0.4611    0.7266    0.0129    0.1536    0.6408
    0.6614    0.5678    0.4120    0.3840    0.6756    0.1909
    0.2844    0.7942    0.7446    0.6831    0.6992    0.8439
    0.4692    0.0592    0.2679    0.0928    0.7275    0.1739
    0.0648    0.6029    0.4399    0.0353    0.4784    0.1708
    0.9883    0.0503    0.9334    0.6124    0.5548    0.9943
```

b)

```
>>B=rand(5,10);

>>A(10:14,20:29)=B;
```

c)

```
>>A=rand(25);
>>B=[A,zeros(25)
zeros(25), A'];
```

On peut l'illustrer avec une matrice plus petite.

```
>>A=rand(2)

A =

    0.0835    0.9776
    0.1958    0.3662


>>B=[A zeros(2)
zeros(2), A'];
>>B
```

B =

0.0835	0.9776	0	0
0.1958	0.3662	0	0
0	0	0.0835	0.1958
0	0	0.9776	0.3662

2.5.3)

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 1$
$3y_1 + y_2 = 0$, $y_2 = 3$
$4y_1 - y_2 + y_3 = 4$, $y_3 = 4 - 4 + 3 = 3$

$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 3$
$-3x_2 + 4x_3 = 3$, $x_2 = (3 - 12)/(-3) = 3$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$, $x_1 = (1 + 3 - 6)/2 = -1$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.5.13)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & 7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.25)

On doit d'abord prouver que D, U et V sont des matrices inversibles.

La matrice D est diagonale, avec tous les éléments plus grands que zéro. Donc, D a n positions pivot. Par l'énoncé (c) du théorème sur les matrices inversibles de la page 120 du livre, D est inversible.

On a $U^TU = I$, et $V^TV = I$. Selon l'énoncé (j) du théorème sur les matrices inversibles de la page 120 du livre, U et V sont inversibles.

Un produit de matrice inversibles étant inversible (voir page 113 du livre), la matrice A est inversible. Son inverse est donné par

$$A^{-1} = (UDV^T)^{-1} = (V^T)^{-1}D^{-1}U^{-1} = VD^{-1}U^T$$

2.5.29)

a)

La matrice de transfert globale est donnée par $A=A_3A_2A_1$, où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{R_1} & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{R_3} & 1 \end{bmatrix}$$

A est donc donnée par:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + R_2/R_1 & -R_2 \\ -1/R_1 - R_2/(R_1 R_3) - 1/R_3 & 1 + R_2/R_3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 + R_2/R_1 & -R_2 \\ -1/R_1 - R_2/(R_1 R_3) - 1/R_3 & 1 + R_2/R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & -12 \\ -1/4 & 3 \end{bmatrix}$$

R_2 = 12 ohms

1 + 12/R_1 = 4/3, R_1 = 36 ohms

1 + R_2/R_3 = 3, R3 = 6 ohms

Vérification:

-1/R_1 - R_2/($R_1 R_3$) -1/R_3 = -1/36 - 12/(36*6) -1/6 = -(1+2+6)/36 = -1/4

Le circuit est tel qu'illustré à la figure 5, page 141 du livre.

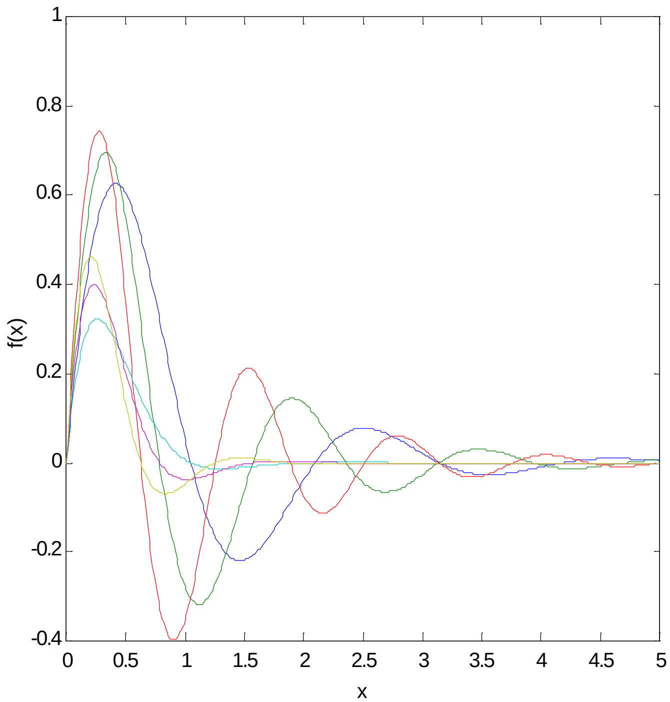
Problème Matlab

Fonction Matlab

```
function y1=dev3(a,b,x)

% La fonction ne retourne que la première courbe

y1=exp(-a(1)*x).*sin(b(1)*x);
y2=exp(-a(1)*x).*sin(b(2)*x);
y3=exp(-a(1)*x).*sin(b(3)*x);
y4=exp(-a(2)*x).*sin(b(1)*x);
y5=exp(-a(2)*x).*sin(b(2)*x);
y6=exp(-a(2)*x).*sin(b(3)*x);

plot(x,y1,x,y2,x,y3,x,y4,x,y5,x,y6)
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
```

Utilisation

```
>>x=[0:0.01:5];
>>a=[1 3];
>>b=[3 4 5];
>>y=dev3(a,b,x);
```



Note: En noir et blanc, il peut être difficile de distinguer les courbes. Nous verrons dans le prochain devoir une autre façon d'afficher plusieurs courbes avec la commande subplot.