Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 4

1)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = (x_2 - 2x_3 + 10)/5 = 2$$

$$y_2 = (-2x_3 + 8)/(-4) = -2$$

$$y_3 = (-2x_1 - 2x_2 + 20)/10 = 2$$

Donc, $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}^{(2)}$:

$$y_1 = (-2 - 4 + 10)/5 = 4/5$$

$$y_2 = (-4+8)/-4 = -1$$

$$y_3 = (-4+4+20)/10 = 2$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2)

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = (x_2 - 2x_3 + 10)/5 = 2$$

$$y_2 = (-2x_3 + 8)/(-4) = -2$$

$$y_3 = (-2y_1 - 2y_2 + 20)/10 = 2$$

Donc, $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}^{(2)}$:

$$y_1 = (-2-4+10)/5 = 4/5$$

$$y_2 = (-4+8)/(-4) = -1$$

$$y_3 = (-8/5 + 2 + 20)/10 = 51/25$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -1 \\ 51/25 \end{bmatrix}$$

3) [Matlab]

Méthode de Jaboby

```
>>A

A =

     5    -1     2
     0    -4     2
     2     2    10

>>b

b =

    10
     8
    20

>>D=diag(diag(A))

D =

     5     0     0
     0    -4     0
     0     0    10

>>N=D-A

N =

     0     1    -2
     0     0    -2
    -2    -2     0

>>x=[0 0 0]';
>>x=D\(N*x+b);x'
```

```
ans =

     2    -2     2

>>x=D\(N*x+b);x’

ans =

    0.8000   -1.0000    2.0000

>>x=D\(N*x+b);x’

ans =

    1.0000   -1.0000    2.0400

>>x=D\(N*x+b);x’

ans =

    0.9840   -0.9800    2.0000

>>x=D\(N*x+b);x’

ans =

    1.0040   -1.0000    1.9992

>>x=D\(N*x+b);x’

ans =

    1.0003   -1.0004    1.9992

>>x=D\(N*x+b);x’

ans =

    1.0002   -1.0004    2.0000

>>x=D\(N*x+b);x’

ans =

    0.9999   -1.0000    2.0000
```

```
>>x=D\(N*x+b);x’

ans =

    1.0000   -1.0000    2.0000
```

Il faut 5 itérations avant d’avoir une différence inférieure à 0.001 sur les 3 coefficients.

Méthode de Gauss-Seidel

```
>>M=tril(A)

M =

     5     0     0
     0    -4     0
     2     2    10

>>N-M-A

ans =

   -10     2    -4
     0     8    -4
    -6    -6   -20

>>x=[0 0 0]’;
>>x=M\(N*x+b);x’

ans =

     2    -2     2

>>x=M\(N*x+b);x’

ans =

    0.8000   -1.0000    2.0400

>>x=M\(N*x+b);x’


ans =

    0.9840   -0.9800    2.0392
```

```
>>x=M\(N*x+b);x'

ans =

    0.9883   -0.9804    1.9976

>>x=M\(N*x+b);x'
ans =

    1.0049   -1.0012    1.9977

>>x=M\(N*x+b);x'

ans =

    1.0007   -1.0012    1.9994

>>x=M\(N*x+b);x'

ans =

    1.0000   -1.0003    2.0002

>>x=M\(N*x+b);x'

ans =

    0.9999   -0.9999    2.0001

>>x=M\(N*x+b);x'

ans =

    1.0000   -1.0000    2.0000
```

Il faut aussi 5 itérations avant d'avoir une différence inférieure à 0.001 sur les 3 coefficients. Pour ce cas précis, la méthode de Gauss-Seidel n'est pas plus rapide.

4)

Matrice de solution autour de l'axe des *z*:

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de translation de (3 -3 2):

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S = S_2 S_1$, car on fait la rotation en premier.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5)

Matrice de projection:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/20 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de données (coordonnées homogènes):

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_D = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 19/20 & 3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Les coordonnées dans $\mathbf{R}^3$ de la projection du triangle sont

$$\begin{bmatrix} 20/19 \\ 20/19 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problème Matlab

Script Matlab

```
% script pour tracer la fonction du devoir #4

a=2;
b=3;
s2=0.5^2;
x=linspace(-1,1,100);
y=linspace(-2,2,100);
[X Y]=meshgrid(x,y);
Z=exp(-(a*X.^2+b*Y.^2)/(2*s2))/(2*pi*s2);

% On peut utiliser "surf" ou "mesh"

%surf(X,Y,Z)
mesh(X,Y,Z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('f(x,y)')
```