Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie
P. Fortier

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 5

1)

Base pour Col A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -2 & 1 \\ -1 & -9 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 16 & -8 & -8 \\ 0 & -12 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 16 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes 1 et 2 sont les colonnes pivot. Donc, les colonnes 1 et 2 de A forment une base pour Col A

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Base pour Nul A

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 et x_4 sont les variables libres.

$$x_1 = -1/2\ x_3 - 3/2\ x_4$$

$$x_2 = 1/2\ x_3 + 1/2\ x_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Une base pour Nul A est donc donnée par les deux vecteurs

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2)

```
A =

     1     5     3     6     2
    -2    -7    -5    -9    -2
     3     6     1     9     5
     4    -5     0    -1    -5

>>rref(A)

ans =

     1     0     0     1     0
     0     1     0     1     1
     0     0     1     0    -1
     0     0     0     0     0
```

x_4 et x_5 sont les variables libres.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 \\ -x_4 - x_5 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc, une base pour Nul A est:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les colonnes pivot de A sont les colonnes 1, 2 et 3.

Donc, une base pour Col A est donnée par les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3)

On doit trouver c_1 et c_2 tels que:

$$c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = -2 \text{ et } c_2 = 2$$

Donc, $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

4)

Matrice 4×6, $n = 6$

dim Nul $A = 3$

$n =$ dim Nul A + dim Col A

$6 = 3 + \dim \text{Col } A$

$\Rightarrow \quad \dim \text{Col } A = 3$

5)

A est inversible et possède n colonnes.

Si A est inversible, alors A possède n colonnes pivot. Donc $\dim \text{Col } A = n$

$n = \dim \text{Nul } A + \dim \text{Col } A$

$n = 0 + n$

$\dim \text{Col } A = n$

$\dim \text{Nul } A = 0$

$\text{rang } A = \dim \text{Col } A = n$

Problème Matlab

```
function y=dev5(x,k)

z=zeros(1,k);

z(1)=x;
t=x;
for i = 2:k
   t=-t*(x^2)/(4*i^2-6*i+2);
   z(i)= z(i-1)+t;
end
y=z(k);

plot(0:k,[0 z])
xlabel('Itération k')
ylabel('s_k')
```

Exemple

```
>>format long
>>sin(5)
```

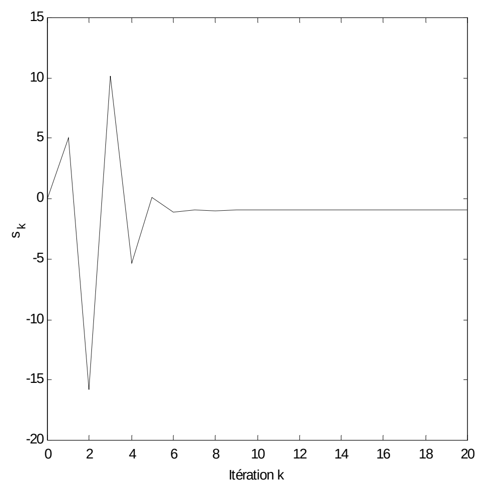
```
ans =

  -0.95892427466314

>>dev5(5,20)

ans =

  -0.95892427466314
```



Solution sans boucle `for`

```
function y=dev5b(x,k)

%Fonction du devoir 5 sans boucle for

%Génération des termes
t=(x*ones(1,k)).^(1:2:(2*k-1))./gamma(2:2:2*k);
%Alternance des signes
t(2:2:k)=-t(2:2:k);
%Calcul de la somme
%s(k) contient le résultat voulu et
s=cumsum(t);
y=s(k);
plot([0:k], [0 s])
xlabel('Itération k')
ylabel('s_k')
```