Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 6

1) (3.2.14)

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-9)\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-9)\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-9)(0) = 0$$

2) (3.2.45)

```
>>A=rand(4,5);
>>B=rand(4,5);
>>C=rand(4,5);
>>D=rand(4,5);
>>det(A'*A)

ans =

 -5.8338e-019

>>det(B'*B)

ans =

 6.5141e-018

>>det(C'*C)

ans =

 -3.1165e-018

>>det(D'*D)

ans =

 -2.4309e-018

>>det(A*A')
```

```
ans =

    0.0506

>>det(B*B’)

ans =

    0.0650

>>det(C*C’)

ans =

    0.0478

>>det(D*D’)

ans =

    0.0130

>>A=rand(5,6);
>>B=rand(5,6);
>>C=rand(5,6);
>>D=rand(5,6);
>>det(A’*A)

ans =

 5.4212e-018

>>det(B’*B)

ans =

 3.0093e-019

>>det(C’*C)

ans =

 -1.5759e-018

>>det(D’*D)

ans =
```

```
 -2.9176e-019

>>det(A*A')

ans =

    0.1249

>>det(B*B')

ans =

    0.0026

>>det(C*C')

ans =

    0.0239

>>det(D*D')

ans =

    0.0077
```

Il semble que A^TA soit toujours une matrice singulière, alors que AA^T donne une matrice non-singulière.

3) (3.3.8)

$$3sx_1 - 5x_2 = 3$$

$$9x_1 + 5sx_2 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -5 \\ 9 & 5s \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 15s^2 + 45 = 15(s^2 + 3)$$

Donc, $\det(A) \neq 0$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

$$\det(A_1(\mathbf{b})) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 5s \end{bmatrix} = 15s + 10 = 5(3s + 2)$$

$$\det(A_2(\mathbf{b})) = \begin{bmatrix} 3s & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = 6s - 27 = 3(2s - 9)$$

$$x_1 = \frac{5(3s+2)}{15(s^2+3)} = \frac{3s+2}{3(s^2+3)}$$

$$x_2 = \frac{3(2s-9)}{15(s^2+3)} = \frac{2s-9}{5(s^2+3)}$$

4) (3.3.13)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, C_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \; C_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5, \; C_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, C_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$\mathrm{adj}(A) = [C_{ji}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 7 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -1\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - 1(-7) = 6$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

5) (3.3.20)

$$-(1, 3) + (4, -5) = (3, -2)$$

La matrice représentant ce parallélogramme est:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Aire} = |\det(A)| = |5 - 12| = 7$$

Note: Le parallélogramme est déjà à l'origine.

6) (3.3.31)

a) Soit $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

avec $u_1 = \frac{x_1}{a},\ u_2 = \frac{x_2}{b},\ u_3 = \frac{x_3}{c}$

En suivant l'exemple 5 (page 209), on constate que **u** est dans la sphère unitaire si et seulement si **x** est dans le volume déterminé par:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{c}\right)^2 \leq 1$$

b)

$$\det(A) = abc$$

$$\{\text{volume}\} = |\det(A)|\{\text{volume de la sphère unitaire}\} = abc\,\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi abc}{3}$$

7)

```
function B=inverse(A)
% Cette fonction calcule l'inverse de la matrice A
% en passant par l'adjointe.

a=size(A);
for i=1:a(1)
   for j=1:a(1)
      I=[1:a(1)]~=i;
      J=[1:a(1)]~=j;
      ADJ(j,i)=(-1)^(i+j)*det(A(I,J));
   end
end
```

```
B=ADJ/det(A);
>>A=rand(4)

A =

    0.4902    0.4507    0.2974    0.9830
    0.8159    0.4122    0.0492    0.5527
    0.4608    0.9016    0.6932    0.4001
    0.4574    0.0056    0.6501    0.1988

>>B=inverse(A)

B =

   -0.9015    1.5944   -0.2820    0.5925
   -0.3602    0.1714    1.2179   -1.1468
    0.1523   -0.9432    0.3478    1.1690
    1.5859   -0.5884   -0.5230   -0.1234

>>B-inv(A)

ans =

  1.0e-015 *

   -0.2220    0.4441   -0.0555    0.2220
         0   -0.1110    0.2220   -0.2220
         0   -0.3331    0.0555         0
    0.2220   -0.1110         0   -0.0139
```

La méthode de l’adjointe donne un résultat qui est très près de l’inverse calculé par “inv”. Les résultats sont les même à 10^{-15} près.

Problème Matlab

```
function y=dev6(A)

s=size(A);

if s(1) ~= s(2)
   B=A*A';
else
   B=A;
end

if det(B) == 0
   'Le déterminant est nul'
   y=0;
else
   y=inv(B);
end
```

```
>>A=rand(3)

A =

    0.2618    0.5711    0.7505
    0.5973    0.7009    0.7400
    0.0493    0.9623    0.4319

>>dev6(A)

ans =

   -2.3827    2.7679   -0.6019
   -1.2892    0.4427    1.4818
    3.1444   -1.3022   -0.9175

>>A=rand(3,4)

A =

    0.6343    0.9455    0.2536    0.7327
    0.8030    0.9159    0.8735    0.4222
    0.0839    0.6020    0.5134    0.9614

>>dev6(A)
```

```
ans =

    3.7877   -1.9387   -1.7096
   -1.9387    1.9618   -0.0420
   -1.7096   -0.0420    2.2813

>>A=rand(4,3)

A =

    0.0721    0.3358    0.4983
    0.5534    0.6802    0.4344
    0.2920    0.0534    0.5625
    0.8580    0.3567    0.6166

>>dev6(A)
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 3.077304e-017.
> In D:\MATLABR11\work\dev6.m at line 15

ans =

  1.0e+015 *

    2.5148   -2.1551   -2.9602    2.1863
   -2.1551    1.8468    2.5368   -1.8736
   -2.9602    2.5368    3.4844   -2.5735
    2.1863   -1.8736   -2.5735    1.9007
```

Ici Matlab a tenté d’inverser une matrice qui est, en théorie, singulière (voir #2 du devoir).

```
>>A=zeros(3)

A =

     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0

>>dev6(A)

ans =

Le déterminant est nul
```

```
ans =

     0

>>A=zeros(3,4)

A =

     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

>>dev6(A)

ans =

Le déterminant est nul

ans =

     0
```