Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie
P. Fortier

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 7

1) (5.1.7)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système $(A - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a une solution non-triviale, donc 4 est une valeur propre de A.

$$x_1 = -x_3,\ x_2 = -x_3,\ x_3 = x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Un vecteur propre correspondant à la valeur propre 4 est:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) (5.1.19)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\text{, valeur propre = 0.}$$

Cette matrice 3×3 n'a pas 3 colonnes linéairement indépendantes; elle n'est donc pas inversible. Par le théorème de la page 301, l'une de ses valeurs propres doit être 0.

3) (5.1.25)

Si λ est une valeur propre de *A*, alors on peut trouver un vecteur **x** non nul tel que:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

On peut réécrire cette équation comme:

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x}$$

$$I\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$$

$$\lambda^{-1}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$$

Donc, λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

4) (5.1.17)

```
A =

     4    -9    -7     8     2
    -7    -9     0     7    14
     5    10     5    -5   -10
    -2     3     7     0     4
    -3   -13    -7    10    11

>>eig(A)

ans =

   5.0000
  -2.0000 + 0.0000i
  -2.0000 - 0.0000i
   5.0000 + 0.0000i
   5.0000 - 0.0000i

>>rref(A-5*eye(5))

ans =
```

```
     1     0    -2     1    -2
     0     1     1    -1     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
```

```
>>rref(A+2*eye(5))

ans =

    1.0000         0         0    0.4000   -0.6000
         0    1.0000         0   -1.4000   -1.4000
         0         0    1.0000    1.0000    1.0000
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
```

$\lambda = 5$

$$x_1 = 2x_3 - x_4 + 2x_5$$
$$x_2 = -x_3 + x_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Une base pour l'espace propre correspondant à $\lambda = 5$ est donc:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -2$

$$x_1 = -0.4x_4 + 0.6x_5$$
$$x_2 = 1.4x_4 + 1.4x_5$$
$$x_3 = -x_4 - x_5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -0,4 \\ 1,4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0,6 \\ 1,4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Une base pour l'espace propre correspondant à $\lambda = -2$ est donc:

$$\begin{bmatrix} -0,4 \\ 1,4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,6 \\ 1,4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou encore } \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

5) (5.2.13)

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 0 \\ 5 & 8 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 0 \\ 5 & 8 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3 - \lambda)[(6 - \lambda)(9 - \lambda) - 4]$$

$$= (3 - \lambda)[\lambda^2 - 15\lambda + 54 - 4]$$

$$= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 50)$$

$$= 3\lambda^2 - 45\lambda + 150 - \lambda^3 + 15\lambda^2 - 50\lambda$$

$$- \lambda^3 + 18\lambda^2 - 95\lambda + 150$$

Note: Comme ce numéro a été fait en classe, je vous donne aussi la solution du numéro 5.2.9.

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=(1 - \lambda)(-3\lambda + \lambda^2 + 6) - 12$$

$$= -3\lambda + \lambda + 6 + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 6\lambda -12$$

$$= - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda - 6$$

6) (5.2.27)

a)

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,5\mathbf{v}_2$$

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix} = 0,2\mathbf{v}_3$$

C.Q.F.D.

Ceci démontre aussi que les valeurs propres de la matrice A sont 1, 0,5 et 0,2.

b)

L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant puisque les vecteurs propres correspondent à des valeurs propres distinctes (voir théorème 2 à la page 301 du livre de Lay).

Puisqu'il y a 3 vecteurs dans cet ensemble, ceux-ci forment une base pour $\mathbf{R}^3$. Il existe donc des constantes uniques telles que

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

On peut donc écrire

$$\mathbf{w}^T\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{w}^T\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{w}^T\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{w}^T\mathbf{v}_3$$

Mais $c_2\mathbf{w}^T\mathbf{v}_2 = 0$ et $c_3\mathbf{w}^T\mathbf{v}_3 = 0$.

On a donc

$$\mathbf{w}^T\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{w}^T\mathbf{v}_1$$

$$1 = c_1$$

car $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_0 = 1$ et $\mathbf{w}^T\mathbf{v}_1 = 1$, $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{v}_1$ étant des vecteurs de probabilité, i.e. dont la somme des éléments donne 1.

Note: $\mathbf{w}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$

c)

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + c_2A^k\mathbf{v}_2 + c_3A^k\mathbf{v}_3$$

$$= \mathbf{v}_1 + c_2(0{,}5)^k\mathbf{v}_2 + c_3(0{,}2)^k\mathbf{v}_3$$

$$\to \mathbf{v}_1 \text{ lorsque } k \to \infty$$

7)
Problème Matlab

```
function x=dev7(A,b,x0,k)

d=diag(A);
D=diag(d);
N=D-A;
x=x0;
X=x;

for i=1:k
   x=(N*x+b)./d;
   X=[X x];
end

plot([0:k],X);

xlabel('k')
ylabel('x_k')
```

Exemple d'utilisation

```
>>A

A =

    10     2     5
    -3     7     1
     1     2     5

>>b

b =

     2
     4
     6

>>x0

x0 =

     0
     0
     0
```

```
>>A\b

ans =

   -0.4444
    0.2088
    1.2054

>>dev7(A,b,x0,20)

ans =

   -0.4444
    0.2088
    1.2054
```