MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 8

1) 5.3.12

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \lambda = 2, 8$$

Trouvons les vecteurs propres.

$\lambda = 2$:

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -x_2 - x_3$$

$$x_2 = x_2$$

$$x_3 = x_3$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comme il y a 2 vecteurs propres associés à $\lambda = 2$, cette valeur propre est double.

$\lambda = 8$:

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_3$$

$$x_2 = x_3$$

$$x_3 = x_3$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a donc:

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) 5.3.31

```
A =

    -6     4     0     9
    -3     0     1     6
    -1    -2     1     0
    -4     4     0     7

>>eig(A)

ans =

    5.0000
    1.0000
   -2.0000
   -2.0000

>>rref(A-5*eye(4))

ans =

    1.0000         0         0   -1.0000
         0    1.0000         0   -0.5000
         0         0    1.0000    0.5000
```

```
        0         0         0         0

>>rref(A-eye(4))

ans =

    1.0000         0         0   -1.0000
         0    1.0000         0    0.5000
         0         0    1.0000    3.5000
         0         0         0         0

>>rref(A+2*eye(4))

ans =

    1.0000         0   -1.0000   -1.5000
         0    1.0000   -1.0000    0.7500
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

$\lambda = 5\colon\ x_1 = x_4,\ x_2 = x_4/2,\ x_3 = x_4/2,\ x_4 = x_4$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1\colon\ x_1 = x_4,\ x_2 = -x_4/2,\ x_3 = -3,5\ x_4,\ x_4 = x_4$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -2\colon\ x_1 = x_3 + \dfrac{3x_4}{2},\ x_2 = x_3 - \dfrac{3x_4}{4},\ x_3 = x_3,\ x_4 = x_4$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a donc:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & -3/4 \\ -1/2 & -7/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) 5.4.4

$T(\mathbf{b}_1)$: $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 0$

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$T(\mathbf{b}_2)$: $x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 1$

$$T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$T(\mathbf{b}_3)$: $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1$

$$T(\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

4) 5.4.26

Si $A = PDP^{-1}$ pour une matrice P quelconque, alors l’énoncé du numéro 5.4.25 nous indique que Tr A =

$\mathrm{Tr}\,[(PD)\,P^{-1}] = \mathrm{Tr}\,[P^{-1}PD] = \mathrm{Tr}\,D]$.

On peut aussi utiliser le résultat du numéro 5.4.25 pour démontrer que puisque A est similaire à D, alors Tr A = Tr D.

Puisque les valeurs propres de A sont sur la diagonale principale de D, Tr D est la somme des valeurs propres de A.

5) 5.4.28

Pour chaque j, $I(\mathbf{b}_j) = \mathbf{b}_j$, et $[I(\mathbf{b}_j)]_C = [(\mathbf{b}_j)]_C$.

Selon l'équation (4), page 322 du livre, $M = [[\mathbf{b}_1]_C \;\; [\mathbf{b}_2]_C \;\; [\mathbf{b}_3]_C]$.

C'est la matrice de changement de coordonnées.

(Voir p. 267 dans le livre, théorème 15).

6)

```
>>A

A =

     2     4    -5
     3    -7     6
     1     3     4

>>P=[b1 b2 b3]

P =

     1     1     2
    -1     1    -1
     2     1     1

>>M=inv(P)*A*P

M =

    4.0000    4.0000   -0.0000
   12.0000    3.0000   11.0000
  -14.0000   -3.0000   -8.0000
```

7)

```
A =

     7    -1     2     0
    -1     7     0     2
     2     0     7    -1
     0     2    -1     7

>>eig(A)

ans =

    6.0000
    8.0000
    4.0000
   10.0000

>>rref(A-6*eye(4))

ans =

     1     0     0    -1
     0     1     0     1
     0     0     1     1
     0     0     0     0

>>rref(A-8*eye(4))

ans =

     1     0     0    -1
     0     1     0    -1
     0     0     1    -1
     0     0     0     0

>>rref(A-4*eye(4))

ans =

     1     0     0     1
     0     1     0     1
     0     0     1    -1
     0     0     0     0

>>rref(A-10*eye(4))
```

```
ans =

     1     0     0     1
     0     1     0    -1
     0     0     1     1
     0     0     0     0
```

$$\lambda = 6:\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 8:\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 4:\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 10:\ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La base est $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

8. Problème Matlab

```
% devoir8.m

load dev8.txt;
s=dev8(:,1);
t=dev8(:,2);
[S T]=meshgrid(s,t);

F=S.^2+T.^2;

G=4*exp(-(S/5-T/10));

subplot(2,1,1)
mesh(s,t,F)
xlabel('s')
ylabel('t')
zlabel('f(s,t)')
```