Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 9

1) $\mathbf{x}_0$:

Posons $k = 0$

$$x_{1,\,0} = 8 + 6 = 14$$

$$x_{2,\,0} = -12 - 10 = -22$$

Donc,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 14 \\ -22 \end{bmatrix}$$

Matrice A:

Solution générale: $\mathbf{x}_k = c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2)^k\mathbf{v}_2$

Le terme 2^k nous indique que l'une des valeurs propres est 1/2. Comme il n'y a pas d'autres termes dépendant de k, on en conclut que l'autre valeur propre est 1.

On a donc:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On prend comme vecteurs propres

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -12 & -10 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -12 & -10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-80+72}\begin{bmatrix} -10 & -6 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 \\ -1{,}5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5{,}5 & 3 \\ -7{,}5 & -4 \end{bmatrix}$$

Si on avait écrit

$$\mathbf{x}_k = 4\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

on aurait obtenu

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 5{,}5 & 3 \\ -7{,}5 & -4 \end{bmatrix}$$

comme trouvé précédemment.

La matrice A est unique. La décomposition $A = PDP^{-1}$ n'est cependant pas unique. Il suffit que P soit une matrice de vecteurs propres indépendants, ce qui est notre cas. Voir le théorème 5, page 314 du livre de Lay.

2) 5.7.10

Valeurs propres:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^{-2} - 3\lambda - \lambda + 3 + 2$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$= 2 \pm j$$

Vecteurs propres:

(Voir exemple 2, page 330 du livre de Lay)

Prenons $\lambda_1 = 2 - j$

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_1 & 1 \\ -2 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 2 + j & 1 \\ -2 & 1 - 2 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la 2e ligne de la matrice, on a

$$-2x_1 + (j - 1)\ x_0 = 0$$

En posant x_2 = - 2 on obtient x_1 = 1 - j et le vecteur propre

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 - j \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1{}^* = \begin{bmatrix} 1 + j \\ -2 \end{bmatrix}$$

La solution du système est donc

$$\mathbf{x}_k = c_1 \begin{bmatrix} 1 - j \\ -2 \end{bmatrix} e^{-(2 - j)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 + j \\ -2 \end{bmatrix} e^{-(2 + j)t}$$

Pour la solution réelle, on utilise le résultat de la page 353 avec $\lambda = 2 + j$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+j \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{x}_1(\mathrm{t}) = [(\mathrm{Re}\,\mathbf{v})\cos bt \text{ - } (\mathrm{Im}\,\mathbf{v})\sin bt]e^{at}$$

$$\mathbf{y}_2(t) = \mathrm{Im}\,\mathbf{x}_1(t)[(\mathrm{Re}\,\mathbf{v})\sin bt + (\mathrm{Im}\,\mathbf{v})\cos bt]e^{at}$$

$$\mathbf{y}_1(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin t\right)e^{2t}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{bmatrix}e^{2t}$$

$$\mathbf{y}_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\sin t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos t\right)e^{2t} = \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ -2\cos t \end{bmatrix}e^{2t}$$

$$\mathbf{x}_k = c_1\begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ -2\sin t \end{bmatrix}e^{2t}$$

3) 5.7.16

```
>>A

A =

    -6   -11    16
     2     5    -4
    -4    -5    10

>>eig(A)

ans =

    4.0000
    3.0000
    2.0000

>>rref(A-4*eye(3))
```

```
ans =

    1.0000         0   -2.3333
         0    1.0000    0.6667
         0         0         0

>>rref(A-3*eye(3))

ans =

     1     0    -3
     0     1     1
     0     0     0

>>rref(A-2*eye(3))

ans =

     1     0    -2
     0     1     0
     0     0     0
```

$$\lambda_1 = 4, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution générale est donc

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

4)

```
function Z=devoir9(A,x0,N)

x=x0;
Z=x0;

for k=1:N
   x=A*x;
   Z=[Z x];
end

n=size(A,1);

for p=1:n
   subplot(n,1,p)
   plot(0:N, Z(p,:), '.')
   xlabel('k')
   ylabel(p)
end
```

Exemple d'utilisation

```
>>A

A =

    0.8000    0.5000
   -0.1000    1.0000

>>x0

x0 =

     3
     3

>>Z=devoir9(A,x0,100);
```