Département de génie électrique et de génie informatique — P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

# MAT-19961 Calcul matriciel en génie

## Solutions - Devoir 10

**1.**

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ -0,3 & 1,1 \end{bmatrix}$$

Trouvons les valeurs propres et les vecteurs propres.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0,3-\lambda & 0,4 \\ -0,3 & 1,1-\lambda \end{vmatrix} = (0,3-\lambda)(1,1-\lambda)+0,12 = \lambda^2 - 1,4\lambda + 0,33$$
$$= (\lambda - 0,9)(\lambda - 0,5)$$

Valeurs propres: 0,9 et 0,5.

$\lambda = 0,9$:

$$A - 0,9I = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,4 \\ -0,3 & -0,2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur propre: $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 0,5$:

$$A - 0,5I = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,4 \\ -0,3 & 0,6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -0,2 & 0,4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur propre: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Comme les deux valeurs propres sont inférieures à 1, l'origine est un point d'attraction. La direction de la plus grande attraction est selon le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre (0,5), i.e la droite passant par le point (1,2) et l'origine.

**2.**

Le système d'équations est

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= 0,95m_k + 0,07l_k + 0,1u_k \\ l_{k+1} &= 0,03m_k + 0,9l_k + 0,05u_k \\ u_{k+1} &= 0,02m_k + 0,03l_k + 0,85u_k \end{aligned}$$

La matrice du système est donc donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,07 & 0,1 \\ 0,03 & 0,9 & 0,05 \\ 0,02 & 0,03 & 0,85 \end{bmatrix}$$

```
>>A

A =

    0.9500    0.0700    0.1000
    0.0300    0.9000    0.0500
    0.0200    0.0300    0.8500

>>[P D]=eig(A)

P =

    0.9083    0.7669   -0.4487
    0.3700   -0.6262   -0.3664
    0.1951   -0.1407    0.8151

D =

    1.0000         0         0
         0    0.8745         0
         0         0    0.8255

>>v1=P(:,1);
>>v1/sum(v1)

ans =

    0.6164
    0.2511
    0.1324
```

Les valeurs propres sont 1, 0.8745, 0.8255. Après un très grand nombre de mois (i.e. $k$ tendant vers l'infini), la solution tend vers le premier vecteur propre, multiplié par une constante.

$$\mathbf{x}_k = c_1 \begin{bmatrix} 0,9083 \\ 0,3700 \\ 0,1951 \end{bmatrix}$$

La proportion entre les marques de bières est 61.64% pour M, 25.11% pour L et 13.24% pour U.

**3.**

Les valeurs propres de $A$ sont -1 et -2. Les vecteurs propres respectifs sont:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a alors:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Or:

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On résout et on trouve que $c_1 = 5$ et $c_2 = -3$. D'où:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 5e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Les 2 valeurs propres de ce système sont négatives, donc l'origine est un point d'attraction (ou puits). La direction de la plus grande attraction est la droite passant par le point (2/3,1) (ou (2,3)) et l'origine.

**4.**

```
A =

    53   -30    -2
    90   -52    -3
    20   -10     2
```

```
>>[P D]=eig(A)

P =

  -0.4472             0.1260 - 0.3975i   0.1260 + 0.3975i
  -0.8944             0.1890 - 0.5963i   0.1890 + 0.5963i
   0.0000            -0.0098 - 0.6593i  -0.0098 + 0.6593i

D =

  -7.0000                  0                  0
        0             5.0000 + 1.0000i        0
        0                  0             5.0000 - 1.0000i

>>v1=P(:,1);
>>v1=v1/v1(1)

v1 =

    1.0000
    2.0000
   -0.0000

>>v2=P(:,2);
>>v2=v2/v2(3)

v2 =

   0.6000 + 0.2000i
   0.9000 + 0.3000i
   1.0000

>>v3=P(:,3);
>>v3=v3/v3(3)

v3 =

   0.6000 - 0.2000i
   0.9000 - 0.3000i
   1.0000
```

On obtient les valeurs propres -7, 5 + *i* et 5 - *i* avec les vecteurs propres correspondants

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6+2i \\ 9+3i \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6-2i \\ 9-3i \\ 10 \end{bmatrix}$$

La solution complexe est donnée par:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-7t} + c_2 \begin{bmatrix} 6+2i \\ 9+3i \\ 10 \end{bmatrix} e^{(5+i)t} + c_3 \begin{bmatrix} 6-2i \\ 9-3i \\ 10 \end{bmatrix} e^{(5-i)t}$$

La solution réelle est donnée par:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-7t} + c_2 \begin{bmatrix} 6\cos t - 2\sin t \\ 9\cos t - 3\sin t \\ 10 \end{bmatrix} e^{5t} + c_3 \begin{bmatrix} 6\cos t + 2\sin t \\ 9\cos t + 3\sin t \\ 10 \end{bmatrix} e^{5t}$$

Lorsque $c_2 = c_3 = 0$, les trajectoires tendent vers **0**. Dans tous les autres cas, les trajectoires forment des spirales en s'éloignant de l'origine.

**5.**

```
>> A=[-2 1/3; 3/2 -3/2];
>> x0=[3;3];
>> eig(A)

ans =

   -2.5000
   -1.0000

>> rref(A-(-2.5)*eye(2))

ans =

    1.0000    0.6667
         0         0

>> rref(A-(-1)*eye(2))

ans =

    1.0000   -0.3333
         0         0
```

Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres -2.5 et -1 sont donc:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a alors:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2,5t} + c_2\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Or:

$$\mathbf{x}(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

On résout et on trouve que $c_1$ = -2 et $c_2$ = 5.

D'où:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-2,5t} + \frac{5}{3}e^{-t} \\ -2e^{-2,5t} + 5e^{-t} \end{bmatrix}$$

**6.**

```
function devoir10(A, alpha, x0, n)

xk = x0;
for k = 0:n
   k
   xk'
   yk = (A - alpha*eye(length(A)))\xk;
   yk'
   [val ind]=max(abs(yk));
   mu_k = yk(ind)
   nu_k = alpha + (1/mu_k)
   xk = (1/mu_k)*yk;
end
```

Exemple d'utilisation

```
>>A

A =
```

```
    10    -8    -4
    -8    13     4
    -4     5     4

>>x0’

ans =

     1     1     1

>>devoir10(A, 1.9, x0, 5)

k =

     0

ans =

     1     1     1

ans =

   4.45037353255069   0.50160085378869   7.75880469583778

mu_k =

   7.75880469583778

nu_k =

   2.02888583218707

k =

     1

ans =

   0.57359009628611   0.06464924346630   1.00000000000000

ans =

   5.01305785827636   0.04417211416928   9.91970041059954

mu_k =
```

```
   9.91970041059954

nu_k =

   2.00080949611457

k =

     2

ans =

   0.50536383668601   0.00445296857172   1.00000000000000

ans =

   5.00124681608011   0.00312649149991   9.99493086039089

mu_k =

   9.99493086039089

nu_k =

   2.00005071710530

k =

     3

ans =

   0.50037833036941   0.00031280771659   1.00000000000000

ans =

   5.00008939481667   0.00022006406592   9.99964631377958

mu_k =

   9.99964631377958

nu_k =

   2.00000353698730
```

```
k =

     4

ans =

   0.50002662473437   0.00002200718496   1.00000000000000

ans =

   5.00000629842721   0.00001548454084   9.99997512904983

mu_k =

   9.99997512904983

nu_k =

   2.00000024871012

k =

     5

ans =

   0.50000187339489   0.00000154845794   1.00000000000000

ans =

   5.00000044321298   0.00000108952630   9.99999825010496

mu_k =

   9.99999825010496

nu_k =

   2.00000001749895
```