Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 2

2.1.6

Première méthode:

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 15 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Deuxième méthode:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 9-4 & (-3)+8 \\ 15+0 & (-5)+0 \\ 3-2 & (-1)+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 15 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.1.14

$$AD = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 12 \\ 2 & 12 & 20 \end{bmatrix} \qquad DA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

AD est obtenue en multipliant respectivement les colonnes de *A* par 2, 3 et 4. *DA* est obtenue en multipliant respectivement les lignes de *A* par 2, 3 et 4.

Pour trouver une matrice *B* tel que *AB* = *BA* (matrice commutant avec *A*), il suffit de prendre une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale sont identiques, i.e. $B = \lambda I$, où λ est un scalaire.

2.1.22

Si les colonnes de *B* sont linéairement dépendantes, alors il existe un vecteur x, non nul, tel que $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Partant de cela, on a $A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{0}$ et $(AB)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (par l'associativité de la multiplication matricielle). Puisque $\mathbf{x}$ est non nul, les colonnes de *AB* doivent être linéairement dépendantes.

2.1.33

a)

```
>>A=zeros(5,6)

A =

     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
```

b)

```
>>B=ones(3,5)

B =

     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
```

c)

```
>>C=eye(6)

C =

     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     1
```

d)

```
>>D=diag([3 5 7 2 4])

D =

     3     0     0     0     0
     0     5     0     0     0
     0     0     7     0     0
```

```
     0     0     0     2     0
     0     0     0     0     4
```

2.2.8

```
>>A=rand(5)

A =

    0.9501    0.7621    0.6154    0.4057    0.0579
    0.2311    0.4565    0.7919    0.9355    0.3529
    0.6068    0.0185    0.9218    0.9169    0.8132
    0.4860    0.8214    0.7382    0.4103    0.0099
    0.8913    0.4447    0.1763    0.8936    0.1389

>>b1=rand(5,1)

b1 =

    0.2028
    0.1987
    0.6038
    0.2722
    0.1988

>>b2=rand(5,1)

b2 =

    0.0153
    0.7468
    0.4451
    0.9318
    0.4660

>>b3=rand(5,1)

b3 =

    0.4186
    0.8462
    0.5252
    0.2026
    0.6721

>>b4=rand(5,1)
```

```
b4 =

    0.8381
    0.0196
    0.6813
    0.3795
    0.8318
```

Première méthode:

```
>>C=inv(A)

C =

   10.9157    7.0952   -3.0741  -11.9832   -3.7273
  -38.3070  -30.4335   12.7347   44.9730   15.5357
   30.3119   24.1962  -10.0050  -34.2520  -13.0995
   10.5097   10.0318   -4.3202  -13.2617   -3.6326
  -53.4866  -43.3430   19.4471   61.7013   21.3738

>>C*b1

ans =

   -2.2355
    9.2038
   -7.0138
   -2.8158
   13.3273

>>C*b2

ans =

   -8.8060
   31.5018
  -23.9416
   -8.3210
   42.9251

>>C*b3

ans =

    4.0260
```

```
  -15.5473
   12.1655
    5.4912
  -21.9876

>>C*b4

ans =

   -0.4541
    5.9612
   -4.8301
   -1.9919
    8.7626
```

Deuxième méthode:

```
>>M=[A b1 b2 b3 b4]

M =

  Columns 1 through 7

    0.9501    0.7621    0.6154    0.4057    0.0579    0.2028    0.0153
    0.2311    0.4565    0.7919    0.9355    0.3529    0.1987    0.7468
    0.6068    0.0185    0.9218    0.9169    0.8132    0.6038    0.4451
    0.4860    0.8214    0.7382    0.4103    0.0099    0.2722    0.9318
    0.8913    0.4447    0.1763    0.8936    0.1389    0.1988    0.4660

  Columns 8 through 9

    0.4186    0.8381
    0.8462    0.0196
    0.5252    0.6813
    0.2026    0.3795
    0.6721    0.8318

>>rref(M)

ans =

  Columns 1 through 7

    1.0000         0         0         0         0   -2.2355   -8.8060
         0    1.0000         0         0         0    9.2038   31.5018
         0         0    1.0000         0         0   -7.0138  -23.9416
```

```
        0         0         0    1.0000         0   -2.8158   -8.3210
        0         0         0         0    1.0000   13.3273   42.9251

  Columns 8 through 9

    4.0260   -0.4541
  -15.5473    5.9612
   12.1655   -4.8301
    5.4912   -1.9919
  -21.9876    8.7626
```

La deuxième méthode est un peu plus rapideque la première.

2.2.18

$A = PBP^{-1}$
$P^{-1}\mathrm{A} = P^{-1}PBP^{-1}$
$P^{-1}\mathrm{A} = P^{-1}PBP^{-1} = IBP^{-1} = BP^{-1}$
$P^{-1}\mathrm{A}P = BP^{-1}P = BI = B$

Donc, $B = P^{-1}\mathrm{A}P$.

2.2.28

a) Soit

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d’un échange deligne, on a F = E.

b) Soit

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir F, il suffit de faire l'opération inverse sur la matrice I_4, i.e. diviser la 4-ième ligne de I_4 par 5.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.34

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A n'est pas équivalente en ligne avec la matrice identité. Elle ne peut donc pas s'inverser.

2.2.36

```
>>A

A =

   -25    -9   -27
   546   180   537
   154    50   149

>>e2=[0 1 0]'
```

```
e2 =

     0
     1
     0

>>e3=[0 0 1]'

e3 =

     0
     0
     1

>> rref([A e2 e3])

ans =

    1.0000         0         0    1.5000   -4.5000
         0    1.0000         0  -72.1667  219.5000
         0         0    1.0000   22.6667  -69.0000
```

Vérification:

```
>>inv(A)

ans =

    5.0000    1.5000   -4.5000
 -224.0000  -72.1667  219.5000
   70.0000   22.6667  -69.0000
```

Problème Matlab

```
function y=dev2(s,x)

x2=x.^2;
s2=s*s;
y=exp(-x2/(2*s2))/(sqrt(2*pi*s2));

plot(x,y)

xlabel('x')
ylabel('f(x)')
title('Gaussienne')
```

Exemple d'utilisation

```
>>x=linspace(-10,10,1000);
>>s=1;
>>y=dev2(s,x);
```