Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie
P. Fortier

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 8

1. a) Faux. L'équation $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ doit avoir une solution non triviale.

b) Vrai. Voir le paragraphe avant le théorème sur les matrices inversibles (page 301 du livre).

c) Vrai. Voir la discussion à propos de l'équation (3), page 298 du livre.

d) Vrai. Voir l'exemple 2, page 297 du livre. Voir aussi la note au milieu de la page 300.

e) Faux. Voir l'avertissement après l'exemple 3, page 298 du livre.

2. a) Faux (quoique vrai pour les matrices triangulaires). Voir l'exemple 1 (page 305 du livre) pour une matrice dont le déterminant n'est pas le produit des éléments de sa diagonale.

b) Faux. Cependant, une opération de changement de ligne ne change pas le déterminant. Voir le théorème 3, page 307 du livre.

c) Vrai. Voir le théorème 3, page 307 du livre.

d) Faux. Voir le paragraphe avant l'exemple 4, page 308 du livre. 5 est une valeur propre de A si et seulement si λ - 5 est un facteur du polynôme caractéristique de A. Il pourrait arriver que λ + 5 soit aussi un facteur du polynôme caractéristique de A.

3.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 34 \\ 2 & 7-\lambda & 43 \\ 0 & 0 & -(6+\lambda) \end{vmatrix} = -(6+\lambda)[(5-\lambda)(7-\lambda) - 8] = -(6+\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27)$$

$$= -(6+\lambda)(\lambda - 9)(\lambda - 3)$$

Les valeurs propres sont donc: -6, 3 et 9.

$\lambda = -6$:

$$A + 6I = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 34 \\ 2 & 13 & 43 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient les équations $x_1 + 2x_3 = 0$, $x_2 + 3x_3 = 0$, $x_3 = x_3$, ce qui donne le vecteur propre:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 34 \\ 2 & 4 & 43 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient les équations $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = x_2$, ce qui donne le vecteur propre:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 9$:

$$A - 9I = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 34 \\ 2 & -2 & 43 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient les équations $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = x_2$, ce qui donne le vecteur propre:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

Les valeurs propres sont donc, 2 (valeur propre double) et 1.

$\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient les équations $x_1 + x_2 - 0.5x_3 = 0$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$, ce qui donne les vecteurs propres:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient les équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = x_3$, ce qui donne les vecteurs propres:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.

```
>> A

A =

    -9    45    35   -40   -10
    35    56     0   -35   -70
   -25   -50   -14    25    50
    10   -15   -35    11   -20
    15    65    35   -50   -44

>>eig(A)

ans =
```

```
   21.0000
 -14.0000
   21.0000
 -14.0000
 -14.0000
```

Les valeurs propres sont donc 21 (valeur propre double) et -14 (valeur propre triple).

```
>>rref(A-21*eye(5))

ans =

    1.0000         0         0    0.4000   -0.6000
         0    1.0000         0   -1.4000   -1.4000
         0         0    1.0000    1.0000    1.0000
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
```

On obtient les équations $x_1 + 0.4x_4 - 0.6x_5 = 0$, $x_2 -1.4x_4 - 1.4x_5 = 0$, $x_3 + x_4 + x_5 = 0$, ce qui donne les vecteurs propres:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{7}{5} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>>rref(A+14*eye(5))

ans =

     1     0    -2     1    -2
     0     1     1    -1     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
```

$x_1 - 2x_3 + x_4 -2 x_5 = 0$, $x_2 + x_3 - x_4 = 0$, $x_3 = x_3$, $x_4 = x_4$, $x_5 = x_5$, ce qui donne les vecteurs propres:

6.

Solution avec une boucle `for`:

```
function z=devoir8aa(x)


for i=1:length(x)
   z(i)=mean(x(1:i));
end


plot(z)
```

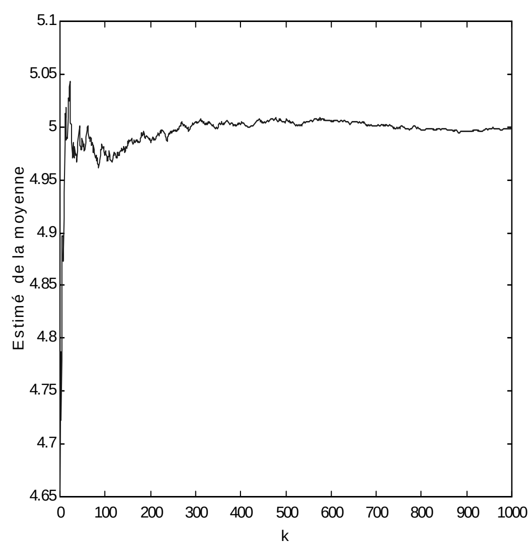
Solution sans boucle `for`, avec la fonction `cumsum`:

```
function z=devoir8a(x)


z=cumsum(x)./(1:length(x));
plot(z)
ylabel('Estimé de la moyenne')
xlabel('k')
```

Exemple d'utilisation

```
>>x=rand(1,1000)+4.5;
>>z=devoir8a(x);xlabel('k')
```



Solution avec une boucle `for`:

```
function z=devoir8b(k,M)


for i=1:M
   x=rand(1,k)+4.5;
   z(i)=mean(x);
end
hist(z,100)
```

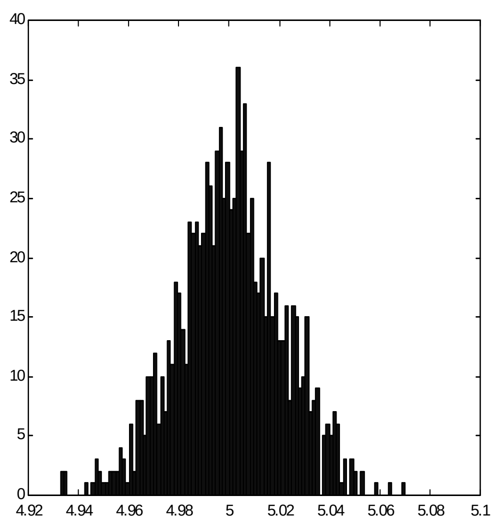
Solution sans boucle `for`:

```
function z=devoir8bb(k,M)


x=rand(k,M)+4.5;
z=mean(x);
hist(z,100)
```

Exemple d'utilisation

```
>>z=devoir8bb(200,1000);
```



Ça ressemble à une distribution gaussienne de moyenne 5.