Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 Calcul matriciel en génie

Solutions - Devoir 9

1.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)$$

Les valeurs propres sont donc 4 et 5 (5 est une valeur propre double). Cela nous donne la matrice D suivante

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Trouvons maintenant les vecteurs propres.

$\lambda = 4$:

$$A-4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci nous donne le vecteur propre

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 5$:

$$A-5I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci nous donne les vecteurs propres

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice P est donc donnée par

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. a) Faux. Les n vecteurs propres doivent être linéairement indépendants. Voir le théorème sur la diagonalisation (page 314 du livre).

b) Faux. La matrice de l'exemple 3 (page 315 du livre) est diagonalisable, mais elle n'a que deux valeurs propres distinctes.

c) Vrai. Ceci découle de $AP = PD$ et des formules (1) et (2) de la preuve du théorème sur la diagonalisation des matrices (page 315) du livre.

d) Faux. Voir l'exemple 4 (page 317 du livre). La matrice de cet exemple est réversible parce que 0 n'est pas une de ses valeurs propres. Cependant, cette matrice n'est pas diagonalisable.

3.

```
A =

        547       -5760       13410       -8540
        384       -4081        9540       -6090
        298       -3180        7448       -4760
        244       -2610        6120       -3914

>>D=diag(eig(A))

D =

   -4.0000          0          0          0
         0     3.0000          0          0
         0          0    -1.0000          0
         0          0          0     2.0000

>>rref(A+4*eye(4))
```

```
ans =

    1.0000         0         0   -2.5000
         0    1.0000         0   -1.6667
         0         0    1.0000   -1.2500
         0         0         0         0

>>p1=[2.5 5/3 1.25 1]';
>>rref(A-3*eye(4))

ans =

    1.0000         0         0   -2.0000
         0    1.0000         0   -1.5000
         0         0    1.0000   -1.2000
         0         0         0         0

>>p2=[2 1.5 1.2 1]';
>>rref(A+eye(4))

ans =

    1.0000         0         0   -1.7500
         0    1.0000         0   -1.4000
         0         0    1.0000   -1.1667
         0         0         0         0

>>p3=[1.75 1.4 7/6 1]';
>>rref(A-2*eye(4))

ans =

    1.0000         0         0   -4.0000
         0    1.0000         0   -2.0000
         0         0    1.0000   -1.3333
         0         0         0         0

>>p4=[4 2 4/3 1]';
>>P=[p1 p2 p3 p4]

P =

    2.5000    2.0000    1.7500    4.0000
    1.6667    1.5000    1.4000    2.0000
    1.2500    1.2000    1.1667    1.3333
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
```

```
>>A*P-P*D

ans =

 1.0e-008 *

   -0.3384    0.5062   -0.2350    0.0673
   -0.2256    0.3796   -0.1882    0.0336
   -0.1692    0.3037   -0.1568    0.0224
   -0.1354    0.2531   -0.1344    0.0168
```

Il y a des erreurs numériques parce que la matrice P est en fait un multiple de la matrice de Hilbert.

4.

a) $T(2 - t + t^2) = 2 - t + t^2 + 2t^2 - t^3 + t^4 = 2 - t + 3t^2 - t^3 + t^4$.

b) Pour des vecteurs **p** et **q** dans $\mathbf{P}^2$ et pour un scalaire c quelconque on a

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p} + \mathbf{q}) &= [\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)] + t^2[\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)] \\ &= [\mathbf{p}(t) + t^2\mathbf{p}(t)] + [\mathbf{q}(t) + t^2\mathbf{q}(t)] \\ &= T(\mathbf{p}) + T(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

$$T(c\mathbf{p}) = [c\mathbf{p}(t)] + t^2[c\mathbf{p}(t)] = c[\mathbf{p}(t) + t^2\mathbf{p}(t)] = cT(\mathbf{p})$$

c) $T(1) = 1 + t^2$, $T(t) = t + t^2$, $T(t^2) = t^2 + t^4$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.

Il suffit de calculer la matrice $B^{-1}AB$, avec $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]$. On trouve $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

6.

Si $A = PBP^{-1}$, alors rang A = rang PBP^{-1} = rang BP^{-1} selon l'exercice supplémentaire 10 du chapitre 4 (page 293 du livre). Également, rang BP^{-1} = rang B, selon l'exercice supplémentaire 11 du chapitre 4 (page 293 du livre), puisque P^{-1} est inversible. Donc, rang A = rang B.

7.

a)

```
function y=devoir9a(A)

s=size(A);
if (s(1)==s(2))
   y=eig(A);
else
   y=eig(A*A');
end
```

Exemples d'utilisation

```
A =

     1     2
     3     4

>>devoir9a(A)

ans =

   -0.3723
    5.3723

>>B

B =

     1     2     3
     4     5     6

>>devoir9a(B)

ans =

    0.5973
   90.4027
```

b)

```
function Y=devoir9b(a,b,c,x)

[B X]=meshgrid(b,x);
Y=a*exp(B.*sin(c*X));
plot(x,Y)
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
```

Exemple d'utilisation

```
>>x=linspace(0,10,1000);
>>b=[-2:2]

b =

    -2    -1     0     1     2

>>Y=devoir9b(2.5,b,1.5,x);
```