Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.
Faire les problèmes 1 à 9. L'examen est sur 80 points.
Le #10 est facultatif et donne des points supplémentaires.

1. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux. (*1 point par question*)

a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, où A est une matrice inversible.

b) Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$, où 0 est une matrice dont tout les éléments sont nuls.

c) Si $AB = AC$ alors $B = C$.

d) Soit A une matrice n x n. $\det A^T = 1/(\det A)$.

e) Soit A une matrice m x n. Col A est un sous-espace de $\mathbf{R}^m$ ($\mathbf{R}$ est l'ensemble des nombres réels).

f) Soit A une matrice m x n. Col A est un sous-espace de $\mathbf{R}^m$.

g) $\dim \text{Col } A + \dim \text{Nul } A \leq n$, où A est une matrice n x n.

h) Si A est une matrice n x n inversible alors rang $A = n$.

i) $\det AB = (\det A)(\det B)$, où A et B sont des matrices carrées.

j) $(B + C) A = AB + AC$.

2. (*10 points*) Calculer la décomposition LU pour la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Supposer $A = UDV^T$, où U et V sont des matrices n x n ayant la propriété que $U^TU = I$ et $V^TV = I$, et où D est une matrice diagonale avec des nombres non nuls $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ sur sa diagonale. On appelle cette décomposition la *décomposition en valeurs singulières*.

a) (*6 points*) Montrer que A est inversible.

b) (*3 points*) Trouver une formule pour A^{-1}.

c) (*1 points*) Calculer D^{-1} en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$.

4. (*10 points*) Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 7 \\ -x_1 + 5x_2 &= -7 \end{aligned}$$

En posant $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, calculer deux itérations avec la méthode de Jacobi (i.e., calculer $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$).

5. a) (*5 points*) Soit A une matrice inversible. Montrer que $\det A^{-1} = 1/(\det A)$.

   b) (*5 points*) Soit A une matrice carrée et P une matrice carrée et inversible. Montrer que $\det(PAP^{-1}) = \det A$.

6. (*5 points*) Calculer

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

7. (*5 points*) Calculer l'inverse de la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

8. Supposer que les matrices A et B sont équivalentes en lignes (i.e. A ~ B).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & -1 & -10 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (*2 points*) Donner le rang de A. Justifier votre réponse.

b) (*2 points*) Donner la dimension de Nul A. Justifier votre réponse.

c) (*3 points*) Calculer une base pour Col A.

d) (*3 points*) Calculer une base pour Row A.

e) (*5 points*) Calculer une base pour Nul A.

9. (*5 points*) Trouver une base pour l'ensemble de tous les vecteurs de la forme:

$$\begin{bmatrix} a - 2b + 5c \\ 2a + 5b - 8c \\ -a - 4b + 7c \\ 3a + b + c \end{bmatrix}$$

10. **Problème facultatif (points supplémentaires)**

L'ensemble de toutes les fonctions réelles et continues définies sur un intervalle fermé $[a, b]$ dans **R** est dénoté $C[a, b]$. Cet ensemble constitue un sous-espace de l'espace vectoriel de toutes les fonctions réelles définies sur $[a, b]$.

a) (*5 points*) Nommez les trois faits que vous devriez prouver sur les fonctions réelles continues afin de démontrer que $C[a, b]$ est bel et bien un sous-espace. (Indice: Quel est le vecteur **0** pour l'espace vectoriel de toutes les fonctions réelles définies sur $[a, b]$?)

b) (*5 points*) Montrer que $\{\mathbf{f}$ dans $C[a, b]$ tel que $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)\}$ est un sous-espace de $C[a, b]$.