Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.

Total	/100
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Signature

ATTENDRE MON SIGNAL AVANT DE TOURNER LA PAGE

1. (*10 points*) Soit A et B, des matrices 10×10 et $\mathbf{c}$, un vecteur 10×1. On vous demande de calculer le produit $AB\mathbf{c}$. Comment vous y prendriez-vous pour faire ce calcul afin minimiser le nombre d'opérations? Justifier votre réponse en donnant le nombre d'opérations requis pour diverses alternatives.

2. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(*10 points*) Calculer l'inverse de cette matrice en utilisant la technique vue en classe.

3. Soit la transformation linéaire de $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{R}^2$.

$$T(x_1, x_2) = (-2x_1 + 3x_2, -3x_1 + 5x_2)$$

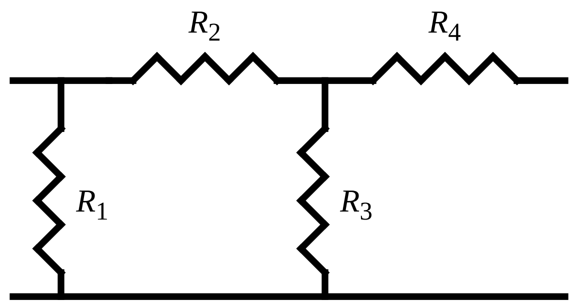
(*5 points*) Montrer que *T* est réversible et trouver une expression pour T^{-1}.

4. Soit la matrice *A* définie au problème 2.

   a) (*10 points*) Trouver la décomposition LU de cette matrice.

b) (*10 points*) Utiliser la décomposition LU trouvée en a) pour résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où A est la matrice du problème 2 et **b** est le vecteur (4, 5, -2).

5. (*10 points*) Calculer la matrice de transfert pour le circuit suivant.



6. Soit le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où A est la matrice définie au problème 2 et $\mathbf{b}$ est le vecteur donné au numéro 4.

   a) (*5 points*) En posant $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, calculer une itération de la méthode de Jacobi, i.e. calculer $\mathbf{x}^{(1)}$. Comparer avec la réponse obtenue au numéro 4.

   b) (*5 points*) Refaire a), mais cette fois avec la méthode de Gauss-Seidel. Comparer votre résultat avec a) et avec la réponse obtenue au numéro 4.

7. (*10 points*) Trouver la matrice 4×4 qui déplace un objet dans $\mathbf{R}^3$ de (5, -2, 1) **et ensuite** effectue une rotation de -45$^{\text{o}}$ autour de l'axe des z.

8. (*5 points*) Dites ce que sont les coordonnées homogènes et pourquoi on les utilisent en infographie.

9. (*10 points*) Soit A, une matrice 5×3 et C, une matrice 3×5 tels que $CA = I$. Soit $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^5$ tel que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ait au moins une solution. Prouver que cette solution est unique.

10. a) (*5 points*) Soit A et B deux matrices $n \times n$ réversibles. $A + B$ est-il réversible? Prouver ou donner un contre exemple.

b) (*5 points*) Prouver le théorème 6b du chapitre 3 du livre, soit

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

BONNE CHANCE!