Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Examen partiel #1

1.

On a deux alternatives, soit $(AB)\mathbf{c}$ et $A(B\mathbf{c})$.

$(AB)\mathbf{c}$

La multiplication AB nécessite 900 additions et 1000 multiplications, car il y a 100 éléments à calculer et chaque élément requiert 10 multiplications et 9 additions.

La multiplication du résultat de AB par le vecteur $\mathbf{c}$ nécessite 100 multiplications et 90 additions, car cette fois-ci, il n'y a que 10 éléments à calculer.

Cela fait donc un total de 1100 multiplications et 990 additions pour la première alternative.

$A(B\mathbf{c})$

La multiplication $B\mathbf{c}$ nécessite 100 multiplications et 90 additions, tout comme le produit du résultat de ce calcul avec A.

Cela fait donc un total de 200 multiplications et 180 additions pour la seconde alternative.

La seconde alternative est de loin la meilleure, du moins si elle est implantée sur un processeur général.

2.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{-3}{17} \\ \frac{-4}{17} & \frac{7}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{5}{17} \end{bmatrix}$$

3.

La matrice correspondant à la transformation linéaire est

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est réversible. Son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Comme A possède un inverse, T est réversible et

$$T^{-1}(x_1, x_2) = (-5x_1 + 3x_2, -3x_1 + 2x_2)$$

4.

a)

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 3{,}4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rappel: pour le calcul de U, il ne faut utiliser que des transformations du type $\text{ligne}_j = \text{ligne}_j + k\text{ligne}_i$.

b)

Il faut résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, soit $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$. On résout d'abord $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. On obtient

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3{,}4 \end{bmatrix}$$

La solution du système $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, et donc de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, est:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5.

La matrice de transfert globale est donnée par $A=A_4A_3A_2A_1$, où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-1}{R_1} & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-1}{R_3} & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -R_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A est donc donnée par:

$$A = \begin{bmatrix} \left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)\left(1 + \dfrac{R_4}{R_3}\right) + \dfrac{R_4}{R_1} & -R_2 - \dfrac{R_4R_2}{R_3} - R_4 \\ -\dfrac{1}{R_3} - \dfrac{R_2}{R_1R_3} - \dfrac{1}{R_1} & \dfrac{R_2}{R_3} + 1 \end{bmatrix}$$

6.

a) Méthode de Jacobi

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système à résoudre est

$$D\mathbf{x}^{(1)} = N\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}$$

On obtient

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Cette réponse est différente de celle obtenue au numéro 4. Par contre, x_1 est le même et les signes de x_2 et x_3 sont bons.

b) Méthode de Gauss-Seidel

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système à résoudre est

$$M\mathbf{x}^{(1)} = N\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}$$

On obtient

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La réponse exacte, soit celle du numéro 4, est obtenue en une seule itération. Il s'agit d'un cas typique où la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement que celle de Jacobi.

7.

On doit calculer le produit $S = RD$, où R est une matrice de rotation donnée par

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de déplacement, D, est donnée par

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrice résultante est donc

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -7\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.

Voir pages 150-155 dans le livre de Lay.

9.

C'est le problème supplémentaire 16 de chapitre 3, p. 159. La solution est à la page A-31.

10.

a)

(A+B) n'est pas réversible en général. Il suffit de trouver deux matrices réversibles, telles que leur somme donne une matrice non réversible, par exemple I et $-I$. La somme donne une matrice avec tous ses éléments nuls, ce qui est clairement non réversible.

b)

La solution est juste après l'énoncé du théorème, pages 110-111.