Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie
P. Fortier

# MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #1
1er octobre 1997

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.

______________________________
Signature

ATTENDRE MON SIGNAL AVANT DE TOURNER LA PAGE

1. Pour chacun des cas, dites si la transformation linéaire de $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{R}^2$ est inversible ou non. Dans l'affirmative, calculer son inverse. Dans la négative, dites pourquoi elle n'est pas inversible.

   a) (*5 points*)

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 + 5x_2, 2x_1 + 3x_2)$$

   b) (*5 points*)

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2)$$

2. (*10 points*) Pour quelle(s) valeur(s) de $h$ la matrice suivante est-elle inversible?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & h \end{bmatrix}$$

3. (*10 points*) On vous donne la décomposition LU de la matrice d'une matrice $A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

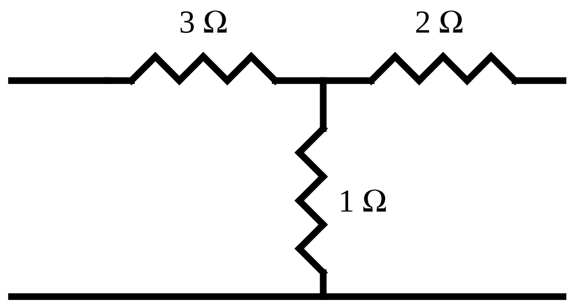
Utiliser cette décomposition LU pour résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, avec

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4. (*10 points*) Calculer la décomposition LU de la matrice suivante.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 4 & 11 & -9 \\ -6 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

5. (*10 points*) Calculer la matrice de transfert pour le circuit suivant.



6. (*10 points*) Soit le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ défini par

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

a) En posant $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, calculer 2 itérations de la méthode de Jacobi, i.e. calculer $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$.

7. Dans chacun des cas, donner une instruction ou une suite d'instruction Matlab pour faire ce qui est demandé.

   a. (*2 points*) Générer une matrice $4 \times 6$ avec des éléments aléatoires qui sont des nombres entiers compris entre -2 et 2.

   b. (*2 points*) Résoudre, sans inverser la matrice, le système d'équations $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, où $A$ est une matrice carrée et **b** est un *vecteur ligne* (on suppose les dimensions compatibles).

   c. (*2 points*) Donner un exemple qui montre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ où $A$ et $B$ sont des matrices carrées de dimensions compatibles.

   d. (*2 points*) Obtenir un vecteur qui contient la diagonale de l'inverse d'une matrice carrée $A$.

   e. (*2 points*) Résoudre le système d'équation $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, où $A$ est une matrice carrée et **b** est un vecteur de dimension compatible avec $A$, en calculant d'abord la décomposition LU de $A$, puis en résolvant les deux systèmes d'équations correspondant à $L$ et à $U$.

8. a) (*2 points*) Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $A^3 = 0$.

b) (*3 points*) Utiliser le résultat de a) et l'algèbre matricielle pour montrer que

$$(I - A)(I + A + A^2) = I.$$

b) (*5 points*) Supposons que $A^n = 0$, pour un certain $n > 1$. Utiliser les résultats de a) et de b) pour trouver un inverse pour $I - A$.

9.

a) (*5 points*) Inverser une matrice $n \times n$ est équivalent à résoudre $n$ systèmes d'équations linéaires. Lesquels?

b) (*5 points*) En utilisant a), expliquer comment vous pourriez utiliser une méthode itérative pour la solution d'un système d'équations linéaires (i.e. méthodes de Jacobi ou de Gauss-Seidel), pour calculer l'inverse d'une matrice $n \times n$.

10. On cherche à résoudre l'équation $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ où $\mathbf{x}$ et $\mathbf{d}$ sont des vecteurs et $C$ est une matrice. On suppose évidemment que toutes les dimensions sont compatibles. Cette équation est utilisée en pratique pour étudier les systèmes économiques de production. Dans certains cas, il est possible d'utiliser une méthode itérative pour résoudre cette équation:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d} \tag{1}$$

a) (*2 points*) L'équation (1) est une récurrence semblable à celle utilisée dans les méthodes de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$M\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

avec $A = M - N$. Que sont, dans l'équation (1), $M$, $N$, $A$ et $\mathbf{b}$?

b) (*3 points*) En posant $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ et en utilisant l'équation (1), trouver une formule pour $\mathbf{x}^{(2)}$ où n'apparaît pas $\mathbf{x}^{(1)}$.

c) (*5 points*) Nous allons vérifier par induction que si $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, alors

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{d} + C\mathbf{d} + C^2\mathbf{d} + \ldots + C^{(k-1)}\mathbf{d} \qquad (2)$$

Pour ce faire, montrer que $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ vérifient bien l'équation (2). Ensuite, en supposant que l'équation (2) soit vraie pour $\mathbf{x}^{(k)}$, montrer qu'elle l'est aussi pour $\mathbf{x}^{(k+1)}$ en utilisant l'équation (1).

*BONNE CHANCE!*

| Total | /100 |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |