Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Examen du 1er octobre 1997

1.

a)
$T(x_1,x_2) = (4x_1+5x_2, 2x_1+3x_2)$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, déterminant $= 4 \times 3 - 5 \times 2 \neq 0$, => A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_2, -x_1 + 2x_2\right)$$

b)
$T(x_1,x_2) = (4x_1+2x_2, 2x_1+x_2)$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, déterminant $= 4 \times 2 - 2 \times 2 = 0$.
Donc A n'est pas inversible, => T n'est pas inversible.

2.

On met la matrice sous forme échelon.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & h \end{bmatrix}$, $\text{ligne}_2 = \text{ligne}_2 - 2\text{ligne}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & h+12 \end{bmatrix}$$, $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3$ - 3ligne_2

Si $h + 12 = 0$, la matrice n'a que 2 pivots.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas-ci, elle n'est pas inversible. Donc, si $h \neq -12$, la matrice est inversible.

3.

$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 1$,

$-3 + y_2 = 0$
$y_2 = 3$,

$4 - 3 + y_3 = 4$
$y_3 = 3$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 3$,

$-3x_2 + 12 = 3$
$x_2 = 3$,

$2x_1 - 3 + 6 = 1$
$x_1 = -1$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 4 & 11 & -9 \\ -6 & -6 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$, $\text{ligne}_2 = \text{ligne}_2$ - 2ligne_1, $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 + 3\text{ligne}_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix}$$, $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_2$ - 2ligne_2

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.

3 ohms série: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1 ohm parallèle: $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2 ohms série: $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} v_4 \\ i_4 \end{bmatrix} = A_3 A_2 A_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_3 A_2) A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Donc, $A = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

6.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, N = D - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

On pose $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(k+1)}$, $\mathbf{x} = \mathbf{y}^{(k)}$.

$$D\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y_1 \\ 4y_2 \\ 5y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$

$y_1 = 6/4 = 1.5$
$y_2 = 6/4 = 1.5$
$y_3 = -10/5 = -2$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4y_1 \\ 4y_2 \\ 5y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 + 6 \\ 2x_1 + 6 \\ -x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 - 2 + 6 \\ 3 + 6 \\ -1.5 + 4.5 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

y_1 = 2.5/4 = 0.625
y_2 = 9/4 = 2.25
y_3 = -7/5 = -1.4

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 2.25 \\ -1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2.5}{4} \\ \frac{9}{4} \\ -\frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

7.

a)

```
round(4 * rand(4,6)) - 2
```

ou

```
round(4 * (rand(4,6) - 0.5))
```

b)

`A\b’`; ne pas oublier la transposée.

c)

```
A = rand(5);
B = rand(5);
inv(A * B) - inv(B) * inv(A)
```

d)

```
X = diag(inv(A))
```

e)

```
[L,U] = lu(A);
y = L\b;
X = U\y;
```

8.

a)

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} = A^2, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = A^3$$

b)

$(I - A)(I + A + A^2) = (I - A) + (I - A)A + (I - A)A^2$
$= I - A + A - A^2 + A^2 - A^3$
$= I - A^3 = I$, car $A^3 = 0$.

c)

On généralise:
$A^3 = 0 \Rightarrow (I + A + A^2) = (I - A)^{-1}$
$A^n = 0 \Rightarrow (I + A + ... + A^{n-1}) = (I - A)^{-1}$

$(I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{n-2} + A^{n-1})$
$= I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + ... + A^{n-2} - A^{n-1} + A^{n-1} - A^n$
$= I$

De même:
$(I + A + A^2 + ... + A^{n-2} + A^{n-1})(I - A) = I$

9.

a)

Inverser une matrice est équivalent à résoudre n systèmes de la forme $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ où $\mathbf{e}_i$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de I.

$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{e}_i$, $\mathbf{x} = i^{\text{ème}}$ colonne de A^{-1}.

D'où la méthode pour inverser $\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}I & A^{-1}\end{bmatrix}$.

b)

On utilise la méthode (Jacobi ou Gauss-Seidel) sur les n systèmes.

Par exemple, avec Jacobi:

$D\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{e}_i$

On calcule $N\mathbf{x}^{(k)}$ et on n'a qu'à additionner 1" au $i^{\text{ème}}$ élément de ce vecteur.

10)

a)

$\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$
$M\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$

$\mathbf{d} = \mathbf{b}$, $M = I$, $C = N$, $A = I - C$

b)

$\mathbf{x}^{(1)} = C\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}$, k=0 dans éq.(1)
$= C\mathbf{0} + \mathbf{d} = \mathbf{d}$

$\mathbf{x}^{(2)} = C\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}$, $k = 1$ dans éq.(2)
$= C\mathbf{d} + \mathbf{d} = \mathbf{d} + C\mathbf{d}$

c)

$k = 1$ dans (2): $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{d}$
$k = 2$ dans (2): $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{d} = C\mathbf{d}$
(2) dans (1): $\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$
$= C(\mathbf{d} + C\mathbf{d} + C^2\mathbf{d} + \ldots + C^{(k-1)}\mathbf{d}) + \mathbf{d}$
$= C\mathbf{d} + C^2\mathbf{d} + C^3\mathbf{d} + \ldots + C^{(k)}\mathbf{d} + \mathbf{d}$
$= \mathbf{x}^{(k+1)}$, selon éq.(2)