Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

Document #3b
P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen de reprise

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.
Faire les problèmes 1 à 9. L'examen est sur 80 points.
Le #10 est facultatif et donne des points supplémentaires.

1. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux. (*1 point par question*)

   a) Si $AB = C$ et que C possède 2 colonnes, alors A possède 2 colonnes.

   b) Si $AB = BA$ et si A est inversible, alors $A^{-1}B = BA^{-1}$.

   c) Si A est inversible et si $r \neq 0$, alors $(rA)^{-1} = rA^{-1}$.

   d) Si A est une matrice 3 x 3, alors $\det 5A = 5 \det A$.

   e) Si $A^3 = 0$, alors $\det A = 0$.

   f) $\det AA^T \geq 0$.

   g) Si B est obtenue à partir de d'une matrice A au moyen de plusieurs opérations élémentaires sur les lignes, alors rang B = rang A.

   h) Le rang d'une matrice est égal au nombre de lignes non nulles de cette matrice.

   i) Une matrice de changement de coordonnées est toujours inversible.

   j) Soit $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p$ des vecteurs dans un espace vectoriel V non nul de dimension finie et soit l'ensemble $S = \{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p\}$. Si $\dim V = p$ et Span $S = V$, alors S ne peut être un ensemble linéairement dépendant.

2. (*10 points*) Calculer la décomposition LU pour la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur dans $\mathbf{R}^n$ avec $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$ et soit $P = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ et $Q = I - 2P$.

   a) (*3 points*) Montrer que $P^2 = P$.

   b) (*3 points*) Montrer que $P^T = P$.

   c) (*4 points*) Montrer que $Q^2 = I$.

4. (*10 points*) Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 7 \\ -x_1 + 5x_2 &= -7 \end{aligned}$$

En posant $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, calculer deux itérations avec la méthode de Gauss-Seidel (i.e., calculer $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$).

5. a) (*5 points*) Soit U une matrice carrée avec $U^T U = I$. Montrer que $\det U = \pm 1$.

   b) (*5 points*) Soit A une matrice avec $A^4 = 0$. Expliquer pourquoi A ne peut pas être inversible.

6. (*5 points*) Calculer

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

7. (*5 points*) Calculer l'inverse de la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Supposer que les matrices A et B sont équivalentes en lignes (i.e. A ~ B).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & 9 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (*2 points*) Donner le rang de A. Justifier votre réponse.

b) (*2 points*) Donner la dimension de Nul A. Justifier votre réponse.

c) (*3 points*) Calculer une base pour Col A.

d) (*3 points*) Calculer une base pour Row A.

e) (*5 points*) Calculer une base pour Nul A.

9. (*5 points*) Trouver une base pour Span $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_5\}$ avec:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10. **Problème facultatif (10 points supplémentaires)**

Soit V l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}$). Montrer que $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$, trois vecteurs dans V, sont des fonctions indépendantes.

a) (*5 points*) $\mathbf{f}(t) = e^{2t}$, $\mathbf{g}(t) = t^2$, $\mathbf{h}(t) = t$.

b) (*5 points*) $\mathbf{f}(t) = \sin(t)$, $\mathbf{g}(t) = \cos(t)$, $\mathbf{h}(t) = t$.

Indice: écrire qu'une combinaison linéaires des fonctions est égale à la fonction nulle (vecteur $\mathbf{0}$). En utilisant trois valeurs pour t, obtenir un système de 3 équations à 3 inconnues.