MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.
Faire les problèmes 1 à 7. L'examen est sur 80 points.
Le #8 est facultatif et donne 10 points supplémentaires.

1. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux. (*1 point par question*)

   a) Deux matrices similaires ont toujours exactement les mêmes valeurs propres.

   b) Deux matrices similaires ont toujours exactement les mêmes vecteurs propres.

   c) La somme de deux vecteurs propres d'une matrice A est également un vecteur propre de A.

   d) Si A, une matrice 5 x 5, a moins de 5 valeurs propres distinctes, alors elle n'est pas diagonalisable.

   e) Si A est diagonalisable, alors les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

   f) Si $\mathbf{x}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$ et à $\mathbf{v}$, alors $\mathbf{x}$ doit être orthogonal à $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

   g) Si $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux.

   h) Si un vecteur $\mathbf{y}$ est égal à sa projection orthogonale dans un sous-espace W, alors $\mathbf{y}$ est dans W.

   i) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est un ensemble orthogonal et si c_1, c_2, c_3 sont des scalaires, alors $\{c_1\mathbf{v}_1, c_2\mathbf{v}_2, c_3\mathbf{v}_3\}$ est un ensemble orthogonal.

   j) Une matrice carrée ayant des colonnes orthogonales a aussi des lignes orthonormales.

2. Soit $\mathbf{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré 2.

   a) (*5 points*) Trouver la matrice de changement de coordonnées de la base $B = \{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\}$vers la base standard $C = \{1, t, t^2\}$.

   b) (*5 points*) Écrire le vecteur des coordonnées dans la base B pour le vecteur $-1 + 2t$.

3. Soit la matrice suivante:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

   L'une des valeurs propres de cette matrice est 4.

a) (*10 points*) Calculer l'équation caractéristique de cette matrice et donner les valeurs propres manquantes.

b) (*5 points*) Calculer l'espace propre correspondant à la valeur propre 4.

4. Calculer une matrice A 3 x 3 ayant comme valeurs propres 3, 4/5 et 3/5 auxquelles correspondent les vecteurs propres

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

et soit la condition initiale

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) (*5 points*) Exprimer $\mathbf{x}_0$ comme une combinaison linéaires des trois vecteurs propres de la matrice A.

b) (*5 points*) Trouver la solution du système dynamique

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

pour la condition initiale $\mathbf{x}_0$ et la matrice A spécifiées plus haut.

c) (*5 points*) Décrire ce que devient la solution lorsque k devient très grand.

5. (*5 points*) Soit U et V deux matrices orthogonales. Expliquer pourquoi le produit UV est aussi une matrice orthogonale.

6. (*10 points*) Trouver, en utilisant la procédure de Gramm-Schmidt, une base orthogonale pour la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Dans ce problème, on désire prouver les relations suivantes entre les quatre sous-espaces fondamentaux d'une matrice A m x n.

$$\text{Row } A = (\text{Nul } A)^{\perp}, \text{ Col } A = (\text{Nul } A^T)^{\perp}$$

a) (*5 points*) Montrer que Row A est inclus dans $(\text{Nul } A)^{\perp}$, c'est-à-dire montrer que si $\mathbf{x}$ est dans Row A, alors $\mathbf{x}$ est orthogonal à tous les $\mathbf{u}$ dans Nul A.

b) (*5 points*) Supposer que rang $A = r$. Trouver dim Nul A et dim $(\text{Nul } A)^{\perp}$ et, en utilisant le résultat de a), en déduire que Row $A = (\text{Nul } A)^{\perp}$.

c) (*5 points*) Expliquer pourquoi Col $A = (\text{Nul } A^{T})^{\perp}$.

8. **Problème facultatif (10 points supplémentaires)**

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Trouver la valeur de A^k lorsque k tend vers l'infini.

BONNE CHANCE ET JOYEUSES FÊTES!