Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #2
8 novembre 1996

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

ATTENDRE MON SIGNAL AVANT DE TOURNER LA PAGE

1. (*10 points*) Calculer le déterminant de la matrice A suivante

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Soit la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

a) (*5 points*) Calculer le déterminant de cette matrice **en utilisant des opérations sur des lignes**.

b) (*5 points*) Calculer le déterminant de T par une expansion en cofacteurs. Vérifier que vous obtenez bien le même résultat qu'en a).

3. (*5 points*) Soit H l'ensemble de toutes les matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Montrer que H est un sous espace de $M_{2\times 2}$, l'ensemble de toutes les matrices 2×2.

4. On définit la transformation $T\colon \mathbf{P}_2 \to \mathbf{R}^2$ par $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$.

Par exemple, si $\mathbf{p}(t) = 3 + 5t + 7t^2$, alors $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}$.

a) (*5 points*) Montrer que T est une transformation linéaire.

b) (*5 points*) Trouver un polynôme $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_2$ qui engendre le noyau de T et décrivez l'image de T.

5. Soit A et B, 2 matrices équivalentes en lignes (i.e. $A \sim B$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (*2 points*) Donner le rang de A. Justifier votre réponse.

b) (*2 points*) Donner la dimension de Nul A. Justifier votre réponse.

c) (*3 points*) Calculer une base pour Col A.

d) (*3 points*) Calculer une base pour Row A.

e) (*5 points*) Calculer une base pour Nul A.

6. Un système dynamique est régit par l'équation matricielle $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (*5 points*) Donner les valeurs propres de A et calculer les vecteurs propres correspondants.

b) (*5 points*) Soit $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$. Calculer une solution pour le système $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres trouvés en a).

c) (*5 points*) Calculer la valeur limite de $\mathbf{x}_k$ lorsque k tend vers l'infini.

d) (*5 points*) $\mathbf{x}_k$ peut-il tendre vers $\mathbf{0}$ pour $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$? Justifier votre réponse.

7. (*5 points*) Soit $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^n$. On définit $p(A)$ comme étant la matrice formée en remplaçant chaque puissance de t dans p(t) par la puissance de A correspondante (avec $A^0 = I$). Autrement dit

$$p(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + ... + c_n A^n$$

Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $p(\lambda)$ est une valeur propre de $p(A)$.

8. (*5 points*) Soit **x** un vecteur propre d'une matrice carrée A correspondant à une valeur propre λ. Montrer que **x** est un vecteur propre de $5I - A$. Quelle est la valeur propre correspondante?

BONNE CHANCE!

Total	/80
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	