Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #2
5 novembre 1997

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

ATTENDRE MON SIGNAL AVANT DE TOURNER LA PAGE

1. Soit les matrices A et B. On suppose que B est équivalente en ligne à A, i.e. $A \sim B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (*1 point*) Donner le rang de A. Justifier votre réponse.

b) (*2 points)* Donner la dimension de Nul A. Justifier votre réponse.

c) (*3 points*) Donner une base pour Col A. Justifier votre réponse.

d) (*4 points*) Calculer une base pour Nul A. Justifier votre réponse.

2. (*10 points*) Soit les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On forme avec une base B avec ces deux vecteurs. Calculer les coordonnées du vecteur **u** relativement à B, avec

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. (*5 points*) Calculer le déterminant de la matrice suivante.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 10 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. (*5 points*) Calculer, en utilisant un déterminant, l'aire du triangle dont les sommets sont donnés par les points (2,3), (8,-1) et (5,5).

5. (*10 points*) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la règle de Cramer.

6. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) (*5 points*) Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres de cette matrice.

b) (*10 points*) Calculer l'espace propre correspondant à chacune des valeurs propres de A.

6. b) (suite)

7. (*15 points*) L'an prochain, dans le cours *Analyse des signaux*, vous apprendrez que l'on peut représenter une fonction périodique selon une série (possiblement infinie) de sinusoïdes. On appelle cela la série de Fourier de la fonction. La figure 1 représente une période d'une fonction périodique $f(x)$ (onde carrée). La série de Fourier de cette fonction est donnée par:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m = 1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin(2\pi m x)$$

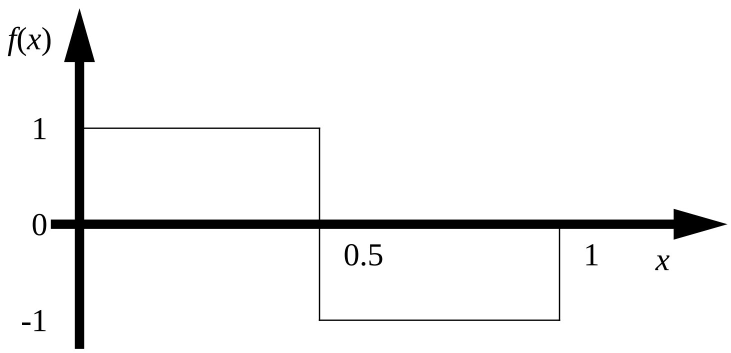

Figure 1: Une période la fonction $f(x)$.

En pratique, on ne peut pas calculer un nombre infini de termes de la série. On se contente donc d'un certain nombre de termes, disons n. Nous allons appeler la fonction obtenue de la série tronquée à n termes $\tilde{f}_n(x)$.

On vous demande d'écrire une fonction Matlab qui:

- calcule $\tilde{f}_n(x)$ pour $0 \le x \le 1$, i.e. la série de Fourier tronquée de la fonction $f(x)$ illustrée à la figure 1, jusqu'à n termes;
- trace un graphique de $\tilde{f}_n(x)$ pour $0 \le x \le 1$;
- trace, sur un autre graphique en dessous du premier, l'erreur quadratique moyenne entre $f(x)$ et $\tilde{f}_i(x)$ pour $0 \le x \le 1$, en fonction du nombre de termes dans la série, pour $i = 1,..., n$;
- trace, en dessous du second graphique, $f(x) - \tilde{f}_n(x)$ pour $0 \le x \le 1$ si $a = 0$, $\left|f(x) - \tilde{f}_n(x)\right|$ pour $0 \le x \le 1$ si $a = 1$ et $(f(x) - \tilde{f}_n(x))^2$ pour $0 \le x \le 1$ autrement.

La fonction a comme arguments n et a et retourne un vecteur contenant $\tilde{f}_n(x)$ pour $0 \le x \le 1$. N'oubliez pas d'identifier les axes de vos graphiques et de mettre des commentaires dans votre fonction. La fonction Matlab pour le sinus est `sin` et on peut obtenir la constante π en utilisant `pi` en Matlab.

7. (suite)

8. (*5 points*) Soit une matrice A 5×6. L'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a-t-elle toujours une solution, peu importe $\mathbf{b}$? Justifier votre réponse en donnant la ou les conditions nécessaires à l'existence d'une solution. À quelle(s) condition(s) cette équation a-t-elle toujours une solution, peu importe $\mathbf{b}$? Justifier votre réponse.

9. (*5 points*) Montrer que si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre du produit matriciel AB et que $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, alors $B\mathbf{x}$ est un vecteur propre de BA.

10. Soit la matrice suivante, appelée *matrice de Vandermonde*.

$$V(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{bmatrix}$$

a, b, et c sont des constantes. Le déterminant de cette matrice est une fonction de t, i.e. $f(t) = \det V(t)$.

a) (*5 points*) Montrer que, lorsque a, b, et c sont des constantes distinctes, $f(t)$ est bien un polynôme de degré 3.

b) (*5 points*) Obtenir les racines de $f(t)$. Indice: vous n'avez pas besoin de calculer $f(t)$. Raisonner à partir des lignes et du déterminant de $V(t)$. On peut faire cette partie sans avoir fait la partie a).

BONNE CHANCE!

Total	/90
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	