Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

# MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

## Solutions - Examen #2

## Question 1

a) Il y a trois positions pivots. Donc rang $A$ = 3.

b) $A$ est une matrice $4 \times 5$, $n$ = 5. Donc dim Nul $A$ = 5 - rang $A$ = 2.

c) On choisit comme base de Col $A$ les colonnes de $A$ correspondant aux positions pivots, i.e. 1,3,5 :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

d)

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_2$ et $x_4$ sont libres.

$x_1 = -2x_2 - 4x_4$
$x_2 = x_2$
$x_3 = (7/5)x_4$
$x_4 = x_4$
$x_5 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Question 2

On cherche $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = \mathbf{u}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-2c_2 = 6$, => $c_2 = -3$

$2c_1 + 3c_2 = -5$, => $2c_1 - 9 = -5$, => $c_1 = 2$

Donc $\mathbf{u} = 2\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2}$.

## Question 3

$$\det(A) = (-4)\det\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-4)\ (-10)\det\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-4)\ (-10)\ (-6)\det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (-4)\ (-10)\ (-6)\ [8 - 20] = 2880$$

## Question 4

On ramène l'un des sommets à (0,0). Utilisons (2,3). Le triangle déplacé a les sommets suivants:

(8 - 2, -1 - 3)    (5 - 2, 5 - 3)    (2 - 2, 3 - 3)

C'est-à-dire:

(6, -4)    (3, 2)    (0, 0)

Donc: $\text{aire} = \frac{1}{2}\text{abs}\left(\det\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\text{abs}\,(12-(-12)) = \frac{24}{2} = 12$

**Question 5**

$$\det(A) = 1.\det\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4.\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -6+8 = 2$$

$x_1$: $\det\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (-2)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (-2)\,(1) = -2$

$x_1 = -2/2 = -1$

$x_2$: $\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$

$x_2 = 1/2 = 0.5$

$x_3$: $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.\det\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 4.\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -3+8 = 5$

$x_3 = 5/2 = 2.5$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

**Question 6**

a) $\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (2-\lambda)\,[(5-\lambda)\,(2-\lambda)+2] = (2-\lambda)\left[\lambda^2-7\lambda+12\right] = (2-\lambda)\,(\lambda-3)\,(\lambda-4)$$

Donc, les valeurs propres sont: 2, 3, 4.

b) $\lambda = 2$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3$ est libre: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

$\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.2 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3$ est libre: $x_1 = 0.2x_3$, $x_2 = 0.2x_3$, $x_3 = x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} x_3$$

$\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3$ est libre : $x_1 = 0.5x_3$, $x_2 = 0.25x_3$, $x_3 = x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 \text{ ou } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} x_3$$

Vecteurs propres:

$$\lambda = 2 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 3 : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \lambda = 4 : \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

## Question 6

```
function y=gibbs(n,a)

% initialisations
x=linspace(0,1,1000);    % On pouvait aussi utiliser une boucle "for"
y=zeros(1,1000);

sg=ones(1,500);
sg=[sg -sg];

eqm=[];

for i=1:2:2*n-1,
   y=y+(4/pi)*(1/i)*sin(2*i*pi*x);
   eqm=[eqm mean((y-sg).^2)];
end

subplot(3,1,1)  % Graphique de la fonction
plot(x,y,x,sg)  % On trace aussi f(x) (pas demandé à l'examen)
xlabel('x')
ylabel('f(x)')

subplot(3,1,2)  % Graphique de l'erreur quadratique moyenne
plot(eqm)
xlabel('n')
ylabel('EQM')

subplot(3,1,3)  % Graphique de l'erreur

if (a==0)
   plot(x,y-sg)
   ylabel('Erreur')
elseif (a==1)
   plot(x,abs(y-sg))
   ylabel('Erreur en valeur absolue')
else
   plot(x,(y-sg).^2)
   ylabel('Erreur quadratique')
end

xlabel('x')
```

## Question 8

$A$ est une matrice $5 \times 6$, $m = 5$, $n = 6$. Supposons que dim Col $A = 4$. $\mathbf{b}$ appartient à $\mathbf{R}^5$, car $m = 5$. Comme le sous-espace Col $A$ est de dimension 4, il peut y avoir des $\mathbf{b}$ appartenant à $\mathbf{R}^5$ qui ne sont pas dans Col $A$. Donc il n'y a pas toujours une solution. $\mathbf{b}$ doit être dans Col $A$ pour qu'il y ait une solution.

Pour toujours avoir une solution, il faut que $A$ ait 5 colonnes pivots, i.e. dim Col $A = 5$.

## Question 9

Soit $\mathbf{x}$ un vecteur propre de $AB$. On a $AB\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$.

$AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow BAB\mathbf{x} = B\lambda\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$.
$\Rightarrow BA(B\mathbf{x}) = \lambda(B\mathbf{x})$

Donc $B\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $BA$.

Note: si $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, on a évidemment :

$$AB\mathbf{x} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} = \lambda B\mathbf{x}$$

## Question 10

a) $\det(V(t)) = 1.\det\begin{bmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{bmatrix} + t \times \det\begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{bmatrix} + t^2 \times \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{bmatrix} + t^3 \times \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

Il suffit de montrer que : $\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \neq 0$.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} = (1)\det\begin{bmatrix} b-a & b^2-c^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

$$= (1)\ (b-a)\ (c-a)\det\begin{bmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{bmatrix} = (1)\ (b-a)\ (c-a)\ [c+a-b-a]$$

$$= (b-a)\ (c-a)\ (c-b)$$

Le résultat obtenu est différent de 0 si les constantes $a$, $b$ et $c$ sont distinctes.

b) $\det(V(t)) = 0$ si 2 lignes sont identiques. Si $t = a$, $b$ ou $c$, alors on a cette condition. Donc $a$, $b$ et $c$ sont des racines.