Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #3

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

ATTENDRE MON SIGNAL AVANT DE TOURNER LA PAGE

1. (*10 points*) Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A.

b) (*5 point*s) La décomposition trouvée en a) est-elle unique? Si oui, expliquer pourquoi; si-non, donner une autre décomposition.

2. On définit la transformation T: $\mathbf{P}_2 \to \mathbf{R}^2$ selon

$$T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(t)\, dt \\ \\ \int_{0}^{2} \mathbf{p}(t)\, dt \end{bmatrix}.$$

a) (*5 points*) Montrer que cette transformation est linéaire.

b) (*5 points*) Calculer la matrice B de cette transformation par rapport à la base $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbf{P}_2$ et la base standard de $\mathbf{R}^2$.

c) (*5 points*) Calculer l'image de $2 + 6t - 7t^2$ de deux façons: en utilisant la matrice B trouvée en b) et directement.

3. a) (*5 points*) Supposons qu'un vecteur **y** soit orthogonal aux vecteurs **u** et **v**. Montrer que **y** est orthogonal au vecteur **u** + **v**.

b) (*5 points*) Montrer que si **x** est à la fois dans W et dans $W^{\perp}$, alors **x** = **0**.

4. Soit U une matrice $m \times n$ ayant des colonnes orthonormales, et soit $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs dans $\mathbf{R}^n$.
   a. (*5 Points*) Montrer que $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

   b. (*5 Points*) Montrer que $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

   c. (*5 Points*) Montrer que $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

5. Soit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) (*10 points*) Trouver le point le plus prêt de $\mathbf{y}$ dans le sous-espace engendré par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

b) (*5 points*) Calculer la distance entre $\mathbf{y}$ est le point trouvé en a).

6. On désire calculer la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (*10 points*) Calculer la matrice Q en appliquant la procédure de Gramm-Schmidt aux colonnes de A.

b) (*5 points*) Calculer R.

7. Soit le système dynamique $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 2-p & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) (*10 points*) Poser $p = 1.5$. Obtenir une solution pour ce système dynamique. Calculer ce qui se passe lorsque k tend vers l'infini. Dire si l'origine est un point d'attraction, de répulsion ou de selle. Justifier votre réponse.

b) (*5 points*) Pour quelle valeur de p obtient-on une solution qui ne tend pas vers **0** ou l'infini?

BONNE CHANCE ET JOYEUSES FÊTES!

Total	/100
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	