Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Examen partiel #3

1.

a) On trouve facilement les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 6$. Les vecteurs propres correspondants sont:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice P est donc donnée par:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

L'inverse de P est:

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La décomposition est donc:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

b) Cette décomposition n'est pas unique. Il suffit de modifier la matrice P en multipliant une de ses colonnes par une constante.

2.

Pas à l'examen de 1997.

3.

a) Problème 6.1.27, p. 377.

b) Problème 6.1.31, p. 377.

4.

Problème 6.2.25 p. 387.

5.

a)

$$\hat{\mathbf{y}} = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b)

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| = 8$$

6.

a) Avec la méthode de Gram-Schmidt, on trouve les trois vecteurs orthogonaux suivants:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En normalisant ces vecteurs, on obtient la matrice Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

b)

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

7.

a) Avec p = 1.5 on a:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

On trouve facilement les valeurs propres λ_1 = 0.5 et λ_2 = -0.5. Les vecteurs propres correspondants sont:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La condition initiale s'exprime, en fonction des vecteurs propres, selon:

$$\mathbf{x}_0 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution du système est donc:

$$\mathbf{x}_{k+1} = 2\,(0.5)^k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-0.5)^k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lorsque $k \to \infty$, $(0.5)^k$ et $(-0.5)^k$ tendent vers 0. $\mathbf{x}_k \to \mathbf{0}$ lorsque $k \to \infty$.

Comme les deux valeurs propres sont inférieures à 1 en valeur absolue, l'origine est un point d'attraction.

b) Il faut que l'une des deux valeurs propres soit égale à 1.

$$\det(A - 1I) = \det\begin{bmatrix} 2-p-1 & 1 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix} = 0$$

On doit donc avoir 2 - p -1 = 0, c'est-à-dire p = 1.