Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #3

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

ATTENDRE MON SIGNAL AVANT DE TOURNER LA PAGE

1. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, avec $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. On définit la transformation linéaire $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) (*5 points*) Vérifier que $\mathbf{b}_1$ est bien un vecteur propre de A mais que A n'est pas diagonalisable.

b) (*5 points*) Trouver la matrice B (i.e "B-matrix") de la transformation T.

2. Soit le système dynamique $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, avec

$$A = \begin{bmatrix} -2{,}5 & 1{,}5 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) (*10 points*) Obtenir une solution pour ce système dynamique. Calculer ce qui se passe lorsque k tend vers l'infini. Dire si l'origine est un point d'attraction, de répulsion ou de selle. Donner également la direction de plus grande attraction et/ou la direction de plus grande répulsion. Justifier vos réponses.

2. a) (suite)

b) (*5 points*) On suppose maintenant un système continu $\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t)$, avec la même matrice A et la même condition initiale qu'en a) (i.e. $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0$). En utilisant les résultats des calculs de a), donner la solution de ce système continu.

3. (*15 points*) Soit les vecteurs

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculer la distance entre $\mathbf{y}$ et le sous-espace engendré par $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$.

3. (suite)

4. On désire calculer la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (*10 points*) Calculer la matrice Q.

b) (*5 points*) Calculer la matrice R.

5. (*10 points*) En utilisant les coordonnées homogènes, trouver la matrice 3×3 qui produit la transformation 2D composée: rotation de 90° dans le sens anti-horaire autour du point (2, 5).

6. On peut évaluer approximativement la dérivée d'une fonction au temps *t* par la formule

$$f'(t) = \frac{f(t) - f(t - \Delta)}{\Delta}$$

où Δ est considéré comme étant très petit.

a) (*5 points*) Écrire un programme Matlab pour calculer la dérivée d'une fonction quelconque sur un intervalle quelconque en vous inspirant de la formule ci-haut.

b) (*5 points*) Écrire un programme Matlab vous permettant de vérifier votre programme de dérivée sur des fonctions dont vous connaissez la dérivée. Donner un exemple d'utilisation.

6. b) (suite)

7. (*5 points*) Une matrice A 8×8 possède 4 valeurs propres distinctes. Un des espaces propres est à une dimension et un autre est à 4 dimensions. Est-il possible que A ne soit pas diagonalisable? Justifier votre réponse.

8. (*5 points*) On désire montrer que si U est une matrice orthogonale, alors toute valeur propre réelle de U doit être soit 1, soit -1. Compléter la preuve en justifiant les étapes ci-dessous.

Si $U\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pour un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|U\mathbf{x}\| && \text{(a)} \\ &= \|\lambda\mathbf{x}\| && \text{(b)} \\ &= |\lambda|\,\|\mathbf{x}\| && \text{(c)} \end{aligned}$$

Ce qui implique que $|\lambda| = 1$. (d)

a)

b)

c)

d)

9. (*5 points*) Une matrice de *Householder* est une matrice de la forme $Q = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire (i.e. de longueur 1). Les matrices de Householder sont utiles en infographie et pour triangulariser des matrices. Montrer que Q est une matrice orthogonale. Indice: calculer Q^TQ.

9. (suite)

BONNE CHANCE ET JOYEUSES FÊTES!

Total	/90
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9