Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Solutions - Examen #3

Question 1

a)

$$A\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{b_1}$$

Donc $\mathbf{b}_1$ est bien un vecteur propre.

$$|A - \lambda I| = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)+1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$$

Donc la valeur propre double est 3.

L'espace propre est: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$

Le vecteur propre est: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Il y a un seul vecteur propre. Or il en faudrait 2 pour que A soit diagonalisable. Donc A n'est pas diagonalisable.

b)

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{b}_1$$

$$T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(\mathbf{b_1})]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(\mathbf{b}_2)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Note: On pouvait aussi faire: $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et calculer: $B = P^{-1}AP$.

Question 2

a)

$$det(A - \lambda I) = det\begin{bmatrix} -2,5-\lambda & 1,5 \\ -9 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2,5\lambda - 12,5 + 13,5$$
$$= \lambda^2 - 2,5\lambda + 1 = (\lambda - 2)(\lambda - 0,5)$$

Vecteurs propres:
$\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} -4,5 & 1,5 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4,5 & 1,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_2/3$ => $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 0,5$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1,5 \\ -9 & 4,5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_2/2$ => $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Condition initiale:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1,\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 1,\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 1$, $c_2 = -1$

Solution:

$$\mathbf{x_k} = (2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - (0{,}5)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lorsque k tend vers l'infini, $\mathbf{x}_k$ tend vers $(2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, car $(0.5)^k$ tend vers 0.

* L'origine est un point de selle, puisqu'une des valeurs propres est supérieure à 1, et l'autre est inférieure à 1 (en valeur absolue).

* Direction de la plus grande attraction: vecteur propre correspondant à la valeur propre inférieure à 1. C'est la ligne passant par l'origine et (1,2).

* Direction de la plus grande répulsion: vecteur propre correspondant à la valeur propre supérieure à 1. C'est la ligne passant par l'origine et (1,3).

b)

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{0{,}5t}$$

Ou encore:

$$x_1(t) = e^{2t} - e^{\frac{t}{2}}$$

$$x_2(t) = 3e^{2t} - 2e^{\frac{t}{2}}$$

Question 3

Vérifions si $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$.

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 1 + 2 + 3 = 6$$

Il faut donc orthogonaliser!

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_2 - \left(\frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1$$

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

$\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 = 6$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Projection de $\mathbf{y}$:

$$\hat{\mathbf{y}} = \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2$$

$\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1 = 1 + 4 + 3 = 8$

$\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2 = \dfrac{4 + 2 - 2}{7} = \dfrac{4}{7}$

$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \dfrac{16 + 1 + 4}{49} = \dfrac{21}{49} = \dfrac{3}{7}$

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{4}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{7}}\mathbf{v}_2 = \frac{4}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{v}_2 = \frac{4}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} + \frac{16}{21} \\ \frac{8}{7} + \frac{4}{21} \\ \frac{12}{7} - \frac{8}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{28}{21} \\ \frac{28}{21} \\ \frac{28}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Question 4

a)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1$$

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 6$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 1 + 0 + 2 = 3$

On peut prendre: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 2$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2$$

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = 3 + 1 + 2 = 6$

$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = 3 - 1 + 0 = 2$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En normalisant $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$, on obtient:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

b)

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \frac{3}{\sqrt{6}} & \sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Question 5

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{: Translation de (-2,-5)}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{: Rotation de 90 degrés}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{: Translation de (2,5)}$$

$$A_3A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On accepte aussi -90 degrés:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas:

$$A_3A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 6

a)

```
function y = derive(nom, a, b)
   x = linspace(a, b, 1000);
   z = feval(nom, x);
   delta = x(2) - x(1);
   for i=2:1000
      y(i-1) =(z(i) - z(i-1))/delta;
   end
```

b)

```
function verifie(fct1, fct2, a, b)
% fct1: fonction à dériver
% fct2: dérivée de la fonction fct1
   x2 = linspace(a, b, 1000);
   z2 = feval(fct2, x2);
   z1 = derive(fct1, a, b);
   x1 = linspace(a, b, 1000);
   x1= x1(2:1000);
   plot(x1, z1, x2, z2)
```

Question 7

Oui.

Une matrice 8×8 est diagonalisable si et seulement si elle possède 8 vecteurs propres linéairement indépendants, autrement dit, si la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à 8.

$\lambda_1 : d_1 = 1$

$\lambda_2 : d_2 = 4$

$\lambda_3 : d_3 = 1$ ou 2

$\lambda_4 : d_4 = 1$ ou 2

On a donc les cas:
$d_3 = d_4 = 1$ (a)
$d_3 = 1, d_4 = 2$ (b)
$d_3 = 2, d_4 = 1$ (c)

Si c'est (a), $\sum_{i=1}^{4} d_i = 7 < 8$

La matrice n'est pas diagonalisable dans ce cas.

Question 8

a) Par le théorème sur les matrices orthonormales.

b) Puisque $U\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

c) Par la propriété de la distance.

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{(\lambda\mathbf{x})(\lambda\mathbf{x})} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|$$

d) Puisque $\|x\| > 0$

Question 9

$$Q^TQ = (I-2\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^T(I-2\mathbf{U}\mathbf{U}^T)$$

Or:

$$(I-2\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^T = I^T-(2\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^T = I-2(\mathbf{U}^T)^T\mathbf{U}^T = I-2\mathbf{U}\mathbf{U}^T$$

Donc:

$$Q^TQ = (I-2\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^T(I-2\mathbf{U}\mathbf{U}^T) = I^2-4\mathbf{U}\mathbf{U}^T+4\mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{U})\mathbf{U}^T$$
$$= I^2-4\mathbf{U}\mathbf{U}^T+4\mathbf{U}(I)\mathbf{U}^T = I^2 = I \text{ car } \mathbf{U}^T\mathbf{U} = I$$

$Q^TQ = I$ si et seulement si Q a des colonnes orthonormales. Or, Q est une matrice carrée. Donc Q est une matrice orthogonale.