Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #1 et solutions
4 octobre 2000

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifiez tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

1. (*10 points*) Trouvez la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -8 & -5 & -5 \\ 12 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -8 & -5 & -5 \\ 12 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -8 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

L:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \div 4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \div 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \div 4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Donnez la commande ou la séquence de commandes Matlab pour faire ce qui est demandé.

a) (*2 points*) Calculez l'inverse de la transposée de la matrice A.

```
>> inv (A')
```

b) (*2 points*) Tracez sur un même graphique les fonctions $e^{-2t}\sin(3\pi t)$ et $e^{-5t}\sin(8\pi t)$ pour t compris entre 0 et 5.

```
>> t = [0:0.01:0.5];
>> plot(t, exp (-2*t).*sin(3*pi*t), t, exp(-5*t).*sin(8*pi*t))
```

c) (*2 points*) Mettre dans le vecteur c la troisième ligne de la matrice B.

```
>> C=B(3,:)
```

d) (*4 points*) Écrire une fonction pour calculer et tracer la fonction $f(x) = axe^{-abx}$.

```
function y = exam1(a, b, x)
y = a*x.*exp(-a*b*x);
plot(x, y)
```

3. Vrai ou faux.

a) (*1 point*) Si A et B sont des matrices carrées et inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Faux

b) (*1 point*) Si $AB = BA$, et A est inversible, alors $A^{-1}B = BA^{-1}$.

Vrai

c) (*1 point*) Si A et B sont des matrices $m \times n$, alors AB^T et A^TB sont définies.

Vrai

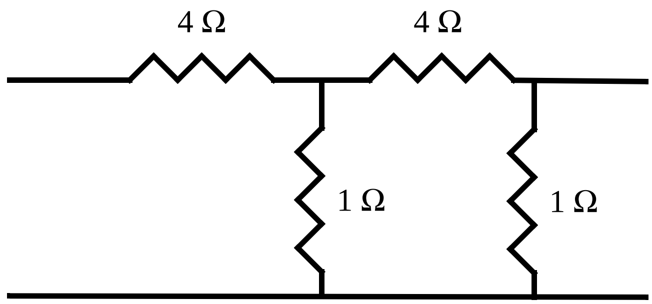
d) (*1 point*) Dans certains cas, il est possible d'avoir quatre vecteurs qui engendrent $\mathbf{R}^5$.

Faux

e) (*1 point*) Si aucun des vecteurs élément de $\mathbf{R}^3$ dans l'ensemble $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ n'est le multiple d'un autre vecteur de S, alors S est un ensemble linéairement indépendant.

Faux

4. (*10 points*) Soit le circuit résistif suivant:



Calculez la matrice de transfert de ce circuit.

$$A = A_4 A_3 A_2 A_1$$

avec

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 5 & -24 \\ -6 & 29 \end{bmatrix}$$

5. a) (*5 points*) Les matrices A, B, C, X, Y, Z et I sont toutes $n \times n$. Calculez X, Y et Z en fonction de A et B si on vous donne

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX & AY & AZ + B \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AX} = I \Rightarrow X = A^{-1}$$

$$AY = 0 \Rightarrow Y = 0$$

$$AZ + B = 0 \Rightarrow AZ = -B \Rightarrow Z = -A^{-1}B$$

b) (*5 points*) Montrez que $\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$ est inversible et calculez son inverse.

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W + AY & X + AZ \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$Z = I,\ Y = 0$$

$$X + A = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -A$$

$$W + AY = I \quad \Rightarrow \quad W = I$$

Donc, $\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

Idem pour le produit inverse.

6. (*10 points*) Soit le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = LU, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Calculez $\mathbf{x}$ en utilisant L et U.

$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 0$, $1/2y_1 + y_2 = -5$, $3/2y_1 - 5y_2 + y_3 = 7$

$y_2 = -5$ $y_3 = -18$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$-6x_3 = 18$, $-2x_2 - x_3 = -5$, $2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$,

$x_3 = 3$ $x_2 = 1$ $x_1 = -5$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7. a) (*5 points*) Soit la transformation $T(x_1, x_2) = (|x_1|, |x_2|)$. Montrez que cette transformation est non-linéaire. Cette transformation est-elle réversible?

Contre-exemple: $\mathbf{u} = (1, -1)$

$$T(1, -1) = (1, 1)$$

$$T(-\mathbf{u}) = \mathrm{T}\,(-1, 1) = (1, 1) \neq -(1, 1)$$

Cette transformation est non-réversible: $T^{-1}(1, 1) = (-1, -1)$ou $(1, 1)$.

b) (*5 points*) Soit la transformation $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_3, x_2, x_1)$. Montrez que cette transformation est linéaire.

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$T(c\mathbf{u}) = T(cu_1, cv_2, cv_3, cv_4) = (cu_4, cv_3, cv_2, cv_1) = cT(\mathbf{u})$$

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4)$$

$$= (u_4 + v_4, u_3 + v_3, u_2 + v_2, u_1 + v_1)$$

$$= (u_4, v_3, v_2, u_1) + (v_4, v_3, v_2, v_1)$$

$$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

c) (*5 points*) Calculez la matrice standard de la transformation de b). Cette transformation est-elle réversible? Donnez une preuve ou un contre-exemple.

$y_1 = x_4$

$y_2 = x_3$

$y_3 = x_2$

$y_4 = x_1$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est réversible car $M \sim I$. Il suffit de permuter les lignes.

8. Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= k \\ 6x_1 + hx_2 &= 2 \end{aligned}$$

a) (*4 points*) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système **n'ait pas de solution**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 6 & h & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & h-18 & 2-6k \end{bmatrix}$$

Si $h = 18$ et $k \neq 1/3$, alors la 2e ligne de la matrice nous donne un système non-compatible.

$$h = 18 \text{ et } k \neq 1/3$$

b) (*3 points*) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système **n'ait qu'une seule solution**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 6 & h & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & h-18 & 2-6k \end{bmatrix}$$

Si $h \neq 18$, alors la matrice a 2 colonnes pivot et le système est compatible.

$$h \neq 18$$

c) (*3 points*) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système **ait une infinité de solutions**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 6 & h & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & h-18 & 2-6k \end{bmatrix}$$

Si $h = 18$ et $k = 1/3$, alors la 2e ligne de la matrice est nulle; il n'y a qu'une colonne pivot et le système est compatible.

$$h = 18 \text{ et } k = 1/3$$

9. (*5 points*) Dites si la transformation linéaire de $\mathbf{R}^3$ à $\mathbf{R}^3$ est inversible ou non. Dans l'affirmative, calculez son inverse. Dans la négative, dites pourquoi elle n'est pas inversible.

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 8x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3, 5x_1 + x_2 + 12x_3)$$

La matrice standard est:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & -14 & -28 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice 3×3 n'a que 2 colonnes pivot. Elle n'est donc pas inversible. Donc, la transformation n'est pas inversible.

BONNE CHANCE!

Total	/85
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	