Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie
P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #1
13 octobre 1998

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifiez tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

1. (*10 points*) Trouvez la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -10 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -10 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -10 & -4 \\ 0 & -3 & 16 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -10 & -4 \\ 0 & -3 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{32}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Donnez la commande ou la séquence de commandes Matlab pour faire ce qui est demandé.

a) (*2 points*) Générer une matrice 6×6 de nombres aléatoires compris entre -2 et 2.

```
4*rand(6)-2;
```

b) (*2 points*) Mettre la troisième colonne de la matrice `A` dans le vecteur `c`.

```
c=A(:,3);
```

c) (*2 points*) Obtenir la solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ et A étant connus.

```
x=A\b;
```

d) (*2 points*) Tracer un graphique de la fonction $e^{-3.5t}$ pour t compris entre 0 et 5.

```
t=[0:0.01:5];
y=exp(-3.5*t);
plot(t,y)
```

e) (*2 points*) Calculer l'inverse d'une matrice `A` en utilisant la décomposition LU.

```
[L,U]=lu(A);
B=inv(U)*inv(L);
```

3. Supposons que A soit inversible.

a) (*5 points*) Expliquez pourquoi $A^T A$ est aussi inversible.

Solution:

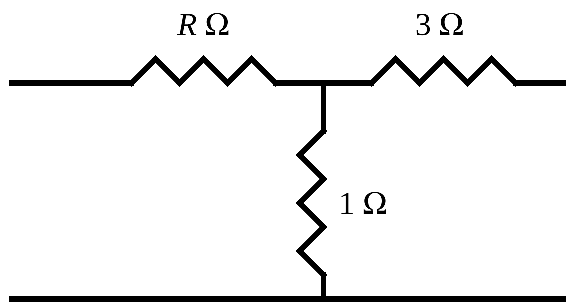
D'après les propriétés des matrices inversibles, si A possède un inverse, alors A^T en possède aussi un. $A^T A$ est le produit de deux matrices inversibles. On peut donc inverser ce produit.

b) (*5 points*) Montrez que $A^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$.

Solution:

$$\begin{aligned}(A^T A)^{-1} A^T &= (A)^{-1} (A^T)^{-1} A^T \\ &= A^{-1} I \\ &= A^{-1}\end{aligned}$$

4. (*10 points*) Soit le circuit résistif suivant:



Calculez la valeur de R afin d'avoir la matrice de transfert

$$\begin{bmatrix} 4 & -19 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution:

Résistance en série: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Résistance en parallèle: $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Résistance en série: $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrice de transfert:

$$A = A_3 A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4R-3 \\ -1 & R+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -19 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

On a donc $R + 1 = 5$, $R = 4$. On peut aussi vérifier les autres éléments de la matrice de transfert, entre autres $-4R - 3 = -19$, $R = 4$.

Réponse: $R = 4\Omega$.

5. (*10 points*) Soit le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

En posant $\mathbf{x^{(0)}} = \mathbf{0}$, utilisez la méthode de Gauss-Seidel pour calculer $\mathbf{x^{(1)}}$ et $\mathbf{x^{(2)}}$.

Solution:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N = M - A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La récurrence s'écrit donc selon:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = (x_2 - x_3 + 8)/2$$
$$y_2 = (-4 - 2y_1)/4$$
$$y_3 = 4 - y_1$$

En posant $\mathbf{x^{(0)}} = \mathbf{0}$, on trouve $y_1 = 8/2 = 4$, $y_2 = (-4 - 8)/4 = -3$ et $y_3 = 4 - 4 = 0$, i.e.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La seconde itération donne $y_1 = (-3 + 0 + 8)/2 = 5/2$, $y_2 = (-4 - 5)/4 = -9/4$ et $y_3 = 4 - 5/2 = 3/2$, i.e.

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

6. (*10 points*) Soit le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/10 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 6/10 \end{bmatrix} = LU, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Calculez $\mathbf{x}$ en utilisant L et U.

Solution:

$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 8$
$y_1 + y_2 = -4$, y2 = -12
$y_1/2 + y_2/10 + y_3 = 4$, $y_3 = 4 - 4 + 12/10 = 1.2$

$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 6/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 12/6 = 2$
$5x_2 - x_3 = -12$, x2 = $(x_3 - 12)/5 = (2 - 12)/5 = -2$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$, $x_1 = (8 + x_2 - x_3)/2 = (8 - 2 - 2)/2 = 2$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. Soit la transformation $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3x_1, 2x_2, x_3)$.

a) (*5 points*) Montrez que cette transformation est linéaire.

Solution:

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4) \\ &= (0, 3(u_1 + v_1), 2(u_2 + v_2), (u_3 + v_3)) \\ &= (0 + 0, 3u_1 + 3v_1, 2u_2 + 2v_2, u_3 + v_3) \\ &= (0, 3u_1, 2u_2, u_3) + (0, 3v_1, 2v_2, v_3) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u}) &= T(cu_1, cu_2, cu_3, cu_4) \\ &= (0, 3cu_1, 2cu_2, cu_3) \\ &= c(0, 3u_1, 2u_2, u_3) \\ &= cT(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Autre réponse acceptable:

Cette transformation peut être représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est donc une transformation linéaire.

b) (*5 points*) Cette transformation est-elle réversible? Donnez une preuve ou un contre-exemple.

Solution:

La matrice standard de cette transformation

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

n'est pas inversible (une colonne nulle). La transformation n'est donc pas inversible.

c) <u>Question facultative</u> (*5 points*) Si on définit le polynôme $p(t) = x_1t^3 + x_2t^2 + x_3t + x_4$, à quoi la transformation T correspond-elle?

Solution:

$p(t) = x_1t^3 + x_2t^2 + x_3t + x_4$

$T(p(t)) = 0t^3 + 3x_1t^2 + 2x_2t + x_3 = 3x_1t^2 + 2x_2t + x_3 = p'(t)$

La transformation correspond donc à la dérivée du polynôme.

8. Soit le système d'équations linéaires

$$x_1 - 3x_2 = 1$$
$$2x_1 - hx_2 = k$$

a) (*4 points*) Trouvez les valeurs de *h* et *k* afin que le système **n'ait pas de solution**.

Solution:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -h & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 6-h & k-2 \end{bmatrix}$$

Pour ne pas avoir de solution, il faut que le système ne soit pas compatible. 6 - h = 0 et $k - 2 \neq 0$. Donc, $h = 6$ et $k \neq 2$.

b) (*3 points*) Trouvez les valeurs de *h* et *k* afin que le système **n'ait qu'une seule solution**.

Pour n'avoir qu'une seule solution, il suffit que $6 - h \neq 0$, i.e. $h \neq 6$.

c) (*3 points*) Trouvez les valeurs de *h* et *k* afin que le système **ait une infinité de solutions**.

Pour avoir une infinité de solutions, il faut que la deuxième ligne de la matrice augmentée soit nulle, soit 6 - h = 0 et k - 2 = 0, i.e. h = 6 et k = 2.

9. (*5 points*) Dites si la transformation linéaire de $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{R}^2$ est inversible ou non. Dans l'affirmative, calculez son inverse. Dans la négative, dites pourquoi elle n'est pas inversible.

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 + 6x_2, 6x_1 + 8x_2)$$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{32 - 36}\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice A étant inversible, T est donc inversible et $T^{-1}(x_1, x_2) = (-2x_1 + (3/2)x_2, (3/2)x_1 - x_2)$.

BONNE CHANCE!

Total	/85
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	