Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #1
12 octobre 1999

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifiez tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

1. (*10 points*) Trouvez la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 10 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

1ère colonne de L: $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \div 2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2e colonne de L: $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \div 3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Donnez la commande ou la séquence de commandes Matlab pour faire ce qui est demandé.

a) (*2 points*) Calculez, sans utiliser la fonction `inv`, la deuxième colonne de l'inverse d'une matrice A 4×4.

```
>> e2=[0 1 0 0]';
>> x=A\e2;
```

b) (*2 points*) Tracez sur une même page, trois graphiques correspondant aux fonctions $\sin(2\pi x)$, $\cos(3\pi x)$ et $\sin(2\pi x) + \cos(3\pi x)$ pour x compris entre 0 et 1.

```
>>x=linspace(0,1,1000);
>>subplot(3,1,1)
>>plot(x,sin(2*pi*x))
>>subplot(3,1,2)
>>plot(x,cos(3*pi*x))
>>subplot(3,1,3)
>>plot(x,sin(2*pi*x)+cos(3*pi*x))
```

c) (*6 points*) Le programme suivant permet de tracer la fonction de densité de probabilité de Rayleigh donnée par

$$f(r) = \begin{cases} (r/\sigma^2)e^{-r^2/\sigma^2} & 0 \le r \le \infty \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

Cette fonction est utilisée pour modéliser l'amplitude des signaux reçus dans les systèmes de radio-mobile. Complétez la fonction Matlab qui trace $f(r)$ pour r compris entre 0 et 10 et pour des valeurs de σ contenues dans un vecteur passé en paramètre. La fonction retourne une matrice contenant les courbes de $f(r)$ pour les différentes valeurs de σ.

```
function Y=rayleigh(sigma)

r=linspace(0,10,1000);% Définition du vecteur r

[S R]=meshgrid(sigma,r);

s2=s.^2;

Y=(R./S2).*exp(-r.^2/S2);

plot(r,Y)%Tracer le graphique
```

3. Vrai ou faux.

a) (*1 point*) Si A et B sont des matrices $n \times n$, alors $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Faux

b) (*1 point*) Si $BC = BD$, alors $C = D$.

Faux

c) (*1 point*) Si $AB = C$ et que C possède 2 colonnes, alors A possède aussi deux colonnes.

Faux

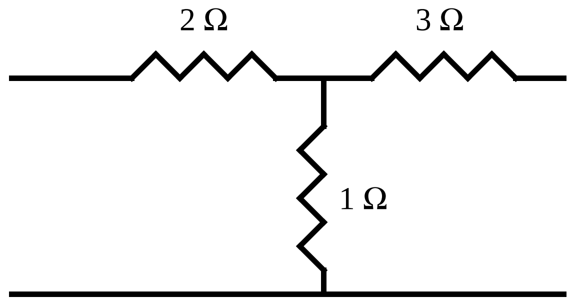
d) (*1 point*) Si $AB = I$, alors A est inversible.

Vrai

e) (*1 point*) Si A est une matrice 3×3 et que l'équation $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a une solution unique, alors A est inversible.

Vrai

4. (*10 points*) Soit le circuit résistif suivant:



Calculez la matrice de transfert de ce circuit.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = A_3 A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. a) (*2 points*) Vérifiez que $A^2 = I$ avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 3-3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

b) (*8 points*) Utilisez les matrices bloc pour montrer que $M^2 = I$ avec $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

avec

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad M_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -M_{11}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^2 + M_{12}M_{21} & M_{11}M_{12} + M_{12}M_{22} \\ M_{11}M_{21} + M_{22}M_{21} & M_{21}M_{12} + M_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I+0 & 0+0 \\ M_{11} - M_{11} & 0+I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I_{4\times 4}$$

6. (*10 points*) Soit le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Calculez $\mathbf{x}$ en utilisant L et U.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$
$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$

1e: $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1, \quad -3y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 3$$

$$4y_1 - y_2 + y_3 = 4 \Rightarrow y_3 = 4 + 3 - 4 = 3$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2e: $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 3, \quad -3x_2 + 4x_3 = 3, \quad \Rightarrow \quad x_2 = (3 - 12)/-3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \quad \Rightarrow \quad x_1 = (1 + 3 - 6)/2 = -1$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7. Soit la transformation linéaire $T(x_0, x_1, x_2, x_3) = (0, x_0, x_1/2, x_2/3, x_3/4)$.

a) (*5 points*) Montrez, en utilisant les propriétés de la linéarité, que cette transformation est linéaire.

1[e] Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$T(c\mathbf{u}) = T(cu_1, cu_2, cu_3, cu_4) = \left(0, cu_1, \frac{cu_2}{2}, \frac{cu_3}{3}, \frac{cu_4}{4}\right) = c\left(0, u_1, \frac{u_2}{2}, \frac{u_3}{3}, \frac{u_4}{4}\right) = cT(\mathbf{u})$$

2[e] Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3, u_4+v_4) = \left(0, u_1+v_1, \frac{u_2+v_2}{2}, \frac{u_3+v_3}{3}, \frac{u_4+v_4}{4}\right)$$

$$= \left(0, u_1, \frac{u_2}{2}, \frac{u_3}{3}, \frac{v_4}{4}\right) + \left(0, v_1, \frac{v_2}{2}, \frac{v_3}{3}, \frac{v_4}{4}\right) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

b) (*5 points*) Calculez la matrice standard de cette transformation. Cette transformation est-elle réversible? Donnez une preuve ou un contre-exemple.

Soit la matrice A telle que A$\mathbf{x} = \mathbf{y}$, avec $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

$y_0 = 0$, $y_1 = x_0$, $y_2 = x_1/2$, $y_3 = x_2/3$, $y_4 = x_3/4$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Cette transformation n'est pas réversible parce que A n'est pas réversible (matrice non carrée.)

c) (*5 points*) Si on définit le polynôme $p(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3$, à quoi la transformation T correspond-elle?

$$T(p(t)) = 0 + x_0 t + \frac{x_1 t^2}{2} + \frac{x_2 t^3}{3} + \frac{x_3 t^4}{4}$$

$$\int p(t)dt = \int (x_0 + x_1 + x_2 t^2 + x_3 t^3) dt$$

$$= x_0 t + \frac{x_1 t^2}{2} + \frac{x_2 t^3}{3} + \frac{x_3 t^4}{4}$$

Il s'agit de l'intégrale!

8. Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} -3x_1 + hx_2 &= 1 \\ 6x_1 + kx_2 &= -3 \end{aligned}$$

a) (*4 points*) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système **n'ait pas de solution**.

$$\begin{bmatrix} -3 & h & 1 \\ 6 & k & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & h & 1 \\ 0 & k+2h & -1 \end{bmatrix}$$

Si $k + 2h = 0$, on a un système non compatible, donc pas de solution. Condition: $k = -2h$.

b) (*3 points*) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système **n'ait qu'une seule solution**.

D'après a), si $k + 2h \neq 0$, alors on a une solution. Cette solution est unique, puisque la matrice $\begin{bmatrix} -3 & h \\ 6 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & h \\ 0 & k+h \end{bmatrix}$ a 2 pivots dans ce cas-ci. Condition: $k \neq -2h$.

c) (*3 points*) Trouvez les valeurs de h et k afin que le système **ait une infinité de solutions**.

Ce cas n'arrive jamais, puisqu'il faudrait pouvoir obtenir une ligne nulle dans la matrice augmentée, ce qui est impossible.

9. (*5 points*) Dites si la transformation linéaire de $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{R}^2$ est inversible ou non. Dans l'affirmative, calculez son inverse. Dans la négative, dites pourquoi elle n'est pas inversible.

$$T(x_1, x_2) = (-3x_1 + 2x_2, 4x_1 + 4x_2)$$

Trouvons A, la matrice standard de T.

$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, det A = -12 -8 = $-20 \neq 0$.

A est inversible $\Rightarrow T$ est inversible.

$A^{-1} = \dfrac{1}{-20} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$.

$$S(x_1,x_2) = T^{-1}(x_1,x_2) = \left(\left(-\frac{1}{5}\right)x_1 + \left(\frac{1}{10}\right)x_2, \left(\frac{1}{5}\right)x_1 + \left(\frac{3}{20}\right)x_2\right)$$

BONNE CHANCE!

Total	/85
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	