Département de génie électrique et de génie informatique P. Fortier
Faculté des sciences et de génie

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #2
15 novembre 2000

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifier tous les calculs et raisonnements.

____
Signature

1. (*10 points*) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la méthode de Jacoby, c'est-à-dire poser $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ et calculer $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$.

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, N = D - A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$D\mathbf{y} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$\mathbf{x}^{(1)}$:

$10y_1 = -4$

$-5y_2 = -15$

$-2y_3 = 5$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -(0,4) \\ 3 \\ -(2,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/10 \\ 3 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}^{(2)}$:

$10y_1 = -4x_2 - x_3 - 4 = -12 + 2.5 - 4 = 13.5$

$-5y_2 = -x_1 - 2x_3 - 15 = 0.4 + 5 - 15 = 9.6$

$-2y_3 = -x_1 + 5 = 0.4 + 5 = 5.4$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1{,}35 \\ 1{,}92 \\ -2{,}7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27/20 \\ 48/25 \\ -27/10 \end{bmatrix}$$

2. (*10 points*) Démontrer qu'en général la rotation et la translation ne sont pas deux opérations commutatives. Utiliser des coordonnées homogènes 2D.

Solution:

Matrice de translation: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S_1$

Matrice de rotation: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S_2$

$$S_1 S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_1$$

$$S_2 S_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -a \\ 0 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_2$$

$A_1 \neq A_2$

3. Soit la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) (*5 points*) Calculer les valeurs propres de A.

Solution:

$$\det\left[A - \lambda I\right] = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Valeurs propres: 4, 3, 2

b) (*10 points*) Calculer les vecteurs propres (i.e. bases pour les espaces propres) de la matrice A.

Solution:

$\lambda = 4$:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -x_3$

$x_2 = -3x_3$

$x_3 = x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vecteur propre = $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

3 b) (suite)

$\lambda = 3$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$

$x_2 = x_2$

$x_3 = 0$

Vecteur propre = $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$

$x_2 = -2x_3$

$x_3 = x_3$

Vecteur propre = $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. (*10 points*) Soit le système dynamique $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Montrer que $\mathbf{x}_k$ tend vers $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ lorsque k devient très grand.

Solution:

Valeurs propres 1 et 1/2.

Vecteurs propres:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & -1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 1/2\, I = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solution générale:

$$\mathbf{x}_0 = c_1\, \mathbf{v}_1 + c_2\, \mathbf{v}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$c_1 = a$, $c_2 = b$

$$\mathbf{x}_k = a\, 1^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\, (1/2)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b(1/2)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to 0 \text{ lorsque } k \to \infty$$

Donc $\mathbf{x}_k \to a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ pour $k \to \infty$

5. Soit les matrices A et B. La matrice B est équivalente en ligne à la matrice A, i.e. $A \sim B$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 10 \\ -2 & -3 & -9 & 5 \\ 3 & 4 & 11 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (*1 point*) Donner le rang de A. Justifier votre réponse.

2 colonnes pivot. Donc, rang $A = 2$.

b) (*2 points*) Donner la dimension de Nul A. Justifier votre réponse.

n = rang A + dim Nul A.

4 = 2 + 2. Donc dim Nul $A = 2$.

c) (*3 points*) Donner une base pour Col A. Justifier votre réponse.

Colonnes pivot: 1 et 2

Base pour Col A = colonnes 1 et 2 de $A = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

d) (*4 points*) Donner une base pour Nul A. Justifier votre réponse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 3x_3 - 8x_4$$

$$x_3 = -5x_3 + 7x_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Base pour Nul } A = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

6. (*10 points*) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trouver la solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la méthode de Cramer.

Solution:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3(-12-3) = -45$$

$$\det A(\mathbf{b}_1) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3(-15) = -45$$

$$\Rightarrow x_1 = (-45)/(-45) = 1$$

$$\det A(\mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3(3+25) - 3(10-12) = 84 + 6 = 90$$

$$\Rightarrow x_2 = 90/(-45) = -2$$

$$\det A(\mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 3(-15) = -45$$

$$\Rightarrow x_3 = (-45)/(-45) = 1$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. (*5 points*) Utiliser, entre autres, des opérations sur les lignes pour montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Solution:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} b-a & a-b \\ c-a & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)-(a-b)(c-a) = 0$$

$ligne_2 = ligne_2 - ligne_1$ et $ligne_3 = ligne_3 - ligne_1$

8. (*10 points*) Soit $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Calculer les coordonnées du vecteur $\mathbf{u}$ relativement à la base B avec

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Solution:

On doit trouver les constantes c_1 et c_2 telles que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}$.

On peut travailler avec les 2 premières lignes et ensuite vérifier la réponse.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = 3,\ c_1 - c_2 = -5 + 3 = -2$$

Vérification:

$$-2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Donc $[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

9. a) (*5 points*) Soit le système dynamique $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ avec $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$. Écrire une fonction Matlab pour tracer $x_{1,k}$ en fonction de $x_{2,k}$ pour $k = 0, \ldots N$. La fonction prend comme arguments la matrice A, la condition initiale $\mathbf{x}_0$ et le nombre d'itérations N. Elle trace le graphique et retourne $\mathbf{x}_N$.

```
function y=exam2a(A, x0, N)

x = x0;
Z = x;

for i=1:N
   x = A*x;
   Z = [Z x];
end

plot(Z(1,:), Z(2,:))
xlabel('x_1')
ylabel('x_2');
y = Z(:,N);
```

b) (*5 points*) Écrire une fonction Matlab prenant comme argument une matrice A $m \times n$. Si $m = n$, la fonction retourne les valeurs propres de A. Si $m > n$, la fonction retourne les valeurs propres de A^TA. Si $m < n$, la fonction retourne les valeurs propres de AA^T.

```
function y=exam2b(A)

s=size(A);
m=s(1);
n=s(2);

if m == n
   y=eig(A);
elseif m > n
   y=eig(A'*A);
else
   y=eig(A*A');
end
```

c) (*5 points*) Écrire un script Matlab pour tracer l'équation $f(x) = e^{-ax}\sin(5x)$ en fonction de x et a pour $0 \le x \le 10$ et $1 \le a \le 2$. Utiliser l'instruction `meshgrid`.

```
%script pour le numéro 9c

x=linspace(0,10);
a=linspace(1,2);

[X, A] = meshgrid(x,a);


Y=exp(-A.*X).*sin(5*X);

mesh(x,a,Y)
```

10. Vrai ou faux

a) (*1point*) En général, les valeurs propres d'une matrice se trouvent sur sa diagonale principale.

Faux

b) (*1point*) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

Faux

c) (*1point*) $\det(A^T A) \geq 0$

Vrai

d) (*1point*) Les colonnes d'une matrice inversible $n \times n$ forment une base pour $\mathbf{R}^n$.

Vrai

e) (*1point*) Soit A une matrice inversible $n \times n$. Alors $\dim \operatorname{Nul} A = 0$.

Vrai

BONNE CHANCE!

Total	/100
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	