Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #2
17 novembre 1998

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifiez tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

1. (*10 points*) Calculez la matrice pour faire une rotation de 45^{o} autour du point (4, 5).

1^{o} Translation de (-4, -5)

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2^{o} Rotation de 45^{o}

$$S_2 = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° & 0 \\ \sin 45° & \cos 45° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3^{o} Translation de (4, 5)

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = S_3 S_2 S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 4 + \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 5 - 9(\sqrt{2}/2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Soit les matrices A et B. La matrice B est équivalente en ligne à la matrice A, i.e. $A \sim B$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & -9 & -3 & -3 & -4 \\ -2 & 6 & 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (*1 point*) Donnez le rang de A. Justifiez votre réponse.

Rang = nombre de colonnes pivots = 3.

b) (*2 points*) Donnez la dimension de Nul A. Justifiez votre réponse.

Rang A + dim Nul A = n = 5. Donc dim Nul A = 2.

c) (*3 points*) Donnez une base pour Col A. Justifiez votre réponse.

En observant B, on remarque que les colonnes pivots sont 1, 2 et 4

Base pour Col A: colonnes 1, 2, et 4 de A.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

d) (*4 points*) Donnez une base pour Nul A. Justifiez votre réponse.

$$A \sim B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 & 0 & 7{,}5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -2{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. (*5 points*) Calculez, en utilisant un déterminant, l'aire du parallélépipède dont les sommets sont donnés par les points (1 1 1), (2 1 1), (3 5 3) et (7 2 4).

   On ramène le solide à (0, 0 0). Pour ce faire, on effectue une translation de (-1, -1, -1). Les sommets sont donc:

   (0, 0, 0)   (1, 0, 0)   (2, 4, 2)   (6, 1, 3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   det A = 10, donc l'aire du parallélépipède est égale à 10.

4. (*10 points*) Soit les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On forme une base *B* avec ces deux vecteurs. Calculez les coordonnées du vecteur **u** relativement à la base *B*, avec

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

On cherche c_1, c_2 tels que

$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v_2} + c_2\mathbf{v_2}$

i.e. $\begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{u}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 3$, $c_2 = 2$.

$$\left[\boldsymbol{u}\right]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. (*10 points*) Soit

$$A = \begin{bmatrix} s^2 & 2s & 1 \\ 0 & 3s & 1 \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Trouvez la solution de ce système en fonction de *s* en utilisant la règle de Cramer.

$$\det A = \begin{vmatrix} s^2 & 2s & 1 \\ 0 & 3s & 1 \\ 0 & s & 1 \end{vmatrix} = s^2 \begin{vmatrix} 3s & 1 \\ s & 1 \end{vmatrix} = s^2(3s - s) = 2s^3$$

$$\det A_1(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2s & 1 \\ 2 & 3s & 1 \\ 3 & s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2s & 1 \\ 0 & -s & -1 \\ 0 & -5s & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -s & -1 \\ -5s & -2 \end{vmatrix} = 2s - 5s = -3s$$

$$\det A_2(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} s^2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = s^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -s^2$$

$$\det A_3(\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} s^2 & 2s & 1 \\ 0 & 3s & 2 \\ 0 & s & 3 \end{vmatrix} = s^2 \begin{vmatrix} 3s & 2 \\ s & 3 \end{vmatrix} = s^2(9s - 2s) = 7s^3$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A_1(\boldsymbol{b}) \\ \det A_2(\boldsymbol{b}) \\ \det A_3(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3s/2s^3 \\ -s^2/2s^3 \\ 7s^3/2s^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-3}{s^2} \\ \dfrac{-1}{2s} \\ \dfrac{7}{2} \end{bmatrix}$$

6. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

a) (*5 points*) Calculez le polynôme caractéristique de A et montrez que les valeurs propres de A sont 1, 8 et -1.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 7 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(5-\lambda)(2-\lambda) - 18\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - (7\lambda + 10) - 18\right]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 8)(\lambda + 1)$$

Valeurs propres 1, 8, -1

b) (*10 points*) Calculez l'espace propre correspondant à chacune des valeurs propres de A.

$\lambda = 1$:

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -3{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -0{,}35 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2{,}3 \\ 0 & 1 & -0{,}35 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2{,}3/4 \\ 0 & 1 & -0{,}35 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} (-2{,}3)/4 \\ 0{,}35 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. b) (suite)

$$\left\{ \begin{bmatrix} -23/40 \\ 7/20 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda = -1$:

$$(A + I) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda = 8$:

$$(A - 8I) = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 6 & 7 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

7. a) (*3 points*) Soit une matrice A. On sait de cette matrice que Nul A est un sous-espace de $\mathbf{R}^7$ et qu'une base pour Col A contient 3 vecteurs. Trouvez dim Nul A. Justifiez votre réponse.

Nul A est un sous-espace de $\mathbf{R}^7$, donc $n = 7$.

Base de Col A contient 3 vecteurs, donc rang $A = 3$.

dim Nul A + rang $A = n$

dim Nul $A = n$ - rang $A = 7 - 3 = 4$

b) (*2 points*) Soit une matrice B telle que dim Nul $B = 1$. B est-elle inversible? Justifiez votre réponse.

dim Nul B =1.

Donc une des colonnes de B n'est pas une colonne pivot.

Donc toutes les colonnes de B ne sont pas linéairement indépendantes.

Donc B n'est pas inversible.

Note: On suppose que B est carrée.

8. (*5 points*) Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & m \end{bmatrix}$$

Montrez que det $A = 0$ correspond à l'équation d'une droite de pente m passant par le point (a, b).

$$\det A = \left| \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & m \end{bmatrix} \right| = 1 \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & m \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & m \end{vmatrix} + y = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= am - b - mx + y = 0$$

$$\text{Donc } y - b = m(x - a)$$

C'est bien une droite de pente m en passant par le point (a, b).

9. Matlab

a) (*6 points*) Soit un système dynamique $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ où A est une matrice 2×2. Écrivez une fonction Matlab qui, partant d'un vecteur initial $\mathbf{x}_0$, calcule et trace l'évolution de $\mathbf{x}_k$, i.e. trace sur un même graphique les points dans $\mathbf{R}^2$ dont les coordonnées sont données par $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$. La fonction prend comme arguments A, $\mathbf{x}_0$ et n et trace le graphique en question.

```
function Z=exam2a(A,x0,n)

Z=x0;
x=x0;
for i=1:n
   x=A*x;
   Z=[Z x];
end
plot(Z(1,:),Z(2,:))
```

b) (*4 points*) Écrivez une fonction Matlab qui retourne l'inverse d'une matrice A si cette matrice est inversible et un message d'erreur dans le cas contraire. Utilisez le déterminant de A pour décider si la matrice possède un inverse. Note: la fonction Matlab `error('Mon message')`retourne le message d'erreur `Mon message` et fait cesser l'exécution de la fonction.

```
function B=exam2a(A)

if (det(A)==0)
   error('Le déterminant est égal à 0!')
else
   B=inv(A)
end
```

10. Vrai ou faux

a) (*1 point*) Si A possède une ligne ou une colonne nulle, alors 0 est une valeur propre de A.

Vrai

b) (*1 point*) Les valeurs propres doivent être des scalaires non nuls.

Faux

c) (*1 point*) A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Vrai

d) (*1 point*) La somme de deux vecteurs propres d'une matrice A est aussi un vecteur propre de A.

Faux

e) (*1 point*) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sont les éléments non nuls de sa diagonale.

Faux

BONNE CHANCE!

Total	/85
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	