Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #2
9 novembre 1999

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifiez tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

1. (*10 points*) Calculez la matrice pour faire une dilatation par un facteur 5 puis une rotation de -45^{o} autour du point (0, 0).

Dilatation $S_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Rotation $\theta = -45°$

$$S_2 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$S = S_2 S_1 = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-5\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

2. (*10 points*) Soit le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

En posant $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, utilisez la méthode de Jacobi pour calculer $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, N = D - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = (-x_2 + 7)/4$$

$$y_2 = (x_1 - 7)/5$$

Première itération:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 7/4 \\ y_2 = -7/5 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ -7/5 \end{bmatrix}$$

Deuxième itération:

$$y_1 = -7/5 + 7/4 = \frac{42}{5 \times 4} = \frac{21}{10} = 2{,}1$$

$$y_2 = (7/4 - 7)/5 = -\frac{21}{4 \times 5} = -\frac{21}{20} = 1{,}05$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 21/10 \\ -21/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ -1{,}05 \end{bmatrix}$$

3. Soit les matrices *A* et *B*. La matrice *B* est équivalente en ligne à la matrice *A*, i.e. $A \sim B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 & -4 & -9 \\ -1 & -2 & -5 & 6 & 16 \\ 0 & 4 & 12 & 5 & 18 \\ -1 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (*1 point*) Donnez le rang de *A*. Justifiez votre réponse.

Rang *A* = 3, car *A* a 3 colonnes pivot.

b) (*2 points*) Donnez la dimension de Nul *A*. Justifiez votre réponse.

n = 5 = Rang *A* + dim Nul *A* = 3 + dim Nul *A*

$\Rightarrow$ dim Nul *A* = 5 - 3 = 2.

c) (*3 points*) Donnez une base pour Col *A*. Justifiez votre réponse.

Base pour Col *A* = colonnes pivot de *A* = colonnes 1, 2 et 4 (selon *B*)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

d) (*4 points*) Donnez une base pour Nul *A*. Justifiez votre réponse.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ variables libres: } x_3 \text{ et } x_5.$$

$x_1 = x_3 - 9x_5$

$x_2 = -3x_3 + 1/2x_5$

$x_4 = -4x_5$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -9 \\ 1/2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Base pour Nul } A \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} -9 \\ 1/2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. (*5 points*) Calculez, en utilisant un déterminant, le volume du parallélépipède dont les sommets sont donnés par les points (3 0 4), (1 2 3), (3 5 4) et (2 2 -3).

Ramenons un des sommets à (0, 0, 0).

(1 2 3) - (3 0 4) = (-2 2 -1)

(3 5 4) - (3 0 4) = (0 5 0)

(2 2 -3) - 3 0 4) = (-1 2 -7)

On a donc la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 5 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 5(14 - 1) = 65$$

Donc, le volume = $|\det A| = |65| = 65$.

5. (*10 points*) Soit les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

On forme une base B avec ces deux vecteurs. Calculez les coordonnées du vecteur **u** relativement à la base B avec

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -13 \\ 9 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On doit résoudre le système V**x = u**

avec **v** = $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -13 \\ 3 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc, $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$

$$[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

6. (*10 points*) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Trouvez la solution de ce système en utilisant la règle de Cramer.

$$\det A = 9\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \times 6 = 54$$

$$\det A_1(\mathbf{b}) = \left|\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -21 + 15 - 3 = -9$$

$$\det A_2(\mathbf{b}) = \left|\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right| = 9\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \times (-1) = -9$$

$$\det A_3(\mathbf{b}) = \left|\begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right| = 9\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 \times 21 = 189$$

$$x_1 = \det A_1(\mathbf{b})/\det A = -9/54 = -1/6$$

$$x_2 = \det A_2(\mathbf{b})/\det A = -9/54 = -1/6$$

$$x_3 = \det A_3(\mathbf{b})/\det A = 189/54 = 7/2$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

7. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

a) (*5 points*) Calculez les valeurs propres de *A*.

$$\det\,(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (6-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)$

Valeurs propres: 6, 4, 5.

b) (*10 points*) Calculez l'espace propre correspondant à chacune des valeurs propres de *A*.

$\lambda = 6$:

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -x_3,\ x_2 = 2x_3,\ x_3 = x_3$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4$:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -1/2x_2,\ x_3 = 0,\ x_2 = x_2$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = x_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. a) (*2 points*) Soit une matrice carrée A. On sait de cette matrice que Col A est un sous-espace de $\mathbf{R}^6$ et que dim Nul $A = 5$. Quel est le rang de cette matrice? Justifiez votre réponse.

Col A est un sous-espace de $\mathbf{R}^6 \quad \Rightarrow n = 6$.

n = dim Nul A + Rang A, donc Rang $A = 6 - 5 = 1$.

b) (*3 points*) Soit une matrice B telle que dim Nul $B = 0$. B est-elle inversible? Justifiez votre réponse.

Si B est carrée: oui, car dim Col $A = n - 0 = n$, donc n colonnes pivot.

Si B n'est pas carrée: non!

9. (*5 points*) Utilisez des opérations sur les lignes pour montrer que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & x & x \\ y & y & y \end{bmatrix} = B$$, en faisant $l_2 = l_2 - l_1$, $l_3 = l_3 - l_1$

$$\det A = \det B = xy \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

10. Matlab

a) (*4 points*) Écrivez une fonction Matlab prenant comme argument une matrice A. Si A est carrée, la fonction retourne les valeurs propres de A. Si A n'est pas carrée, la fonction retourne les valeurs propres de AA^T.

```
function y=exam2a(A)

s=size(A);

if (s(1)==s(2))
   y=eig(A);
else
   y=eig(A*A');
end
```

b) (*6 points*) Écrivez une fonction Matlab pour calculer et tracer la fonction $f(x) = ae^{b\sin cx}$. La fonction prend comme arguments un vecteur **x** et les paramètres a, b et c. a et c sont des scalaires, mais b est un vecteur. La fonction retourne une matrice dont les lignes contiennent $f(\mathbf{x})$ pour chaque valeur contenue dans b. De plus, la fonction trace, sur un même graphique, $f(x)$ en fonction de x, paramétrisée par les différentes valeurs contenues dans b.

```
function Y=exam2b(a,b,c,x)

[B X]=meshgrid(b,x);
Y=a*exp(B.*sin(c*X));
plot(x,Y)
```

11. Vrai ou faux

a) (*1 point*) Soit A une matrice carrée. Si $A^3 = 0$ alors $\det A = 0$.

Vrai

b) (*1 point*) Les valeurs propres doivent être des scalaires non nuls.

Faux

c) (*1 point*) Le déterminant d'une matrice carrée A est le produit des éléments de sa diagonale.

Faux

d) (*1 point*) Pour calculer les valeurs propres d'une matrice carrée A, il faut d'abord la mettre sous forme échelon.

Faux

e) (*1 point*) Un espace propre d'une matrice carrée A est le noyau d'une certaine matrice.

Vrai

BONNE CHANCE!

Total	/95
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	