Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté des sciences et de génie

P. Fortier

MAT-19961 CALCUL MATRICIEL EN GÉNIE

Examen partiel #3
16 décembre 1998

Examen à livre fermé. La calculatrice est interdite.
Justifiez tous vos calculs et raisonnements.

____
Signature

BONNE CHANCE

ET

BONNES VACANCES!

Total	/85
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1. (*15 points*) Trouvez la distance entre Col A et $\mathbf{y}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$$

$\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_2$ et donc Col A = Span $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 2 + 0 + 0 = 2 \neq 0$: on doit orthogonaliser!

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{2+0+0}{4+0+4}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1/2 \\ 3 \\ 0 - 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Proj}_W\, \mathbf{y} = \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 = \left(\frac{4+0+4}{4+4}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1+3-1}{1/4+9+1/2}\right)\begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= (1)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{6}{19}\right)\begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41/19 \\ 18/19 \\ 35/19 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 41/19 \\ 18/19 \\ 35/19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/19 \\ 1/19 \\ 3/19 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\frac{9+1+9}{19^2}} = \sqrt{\frac{19}{19^2}} = \frac{1}{\sqrt{19}}$$

2. (*5 points*) Trouvez $T(a_0 + a_1t + a_2t^2)$ si T est une transformation linéaire de $\mathbf{P}_2$ vers $\mathbf{P}_2$ dont la matrice de transformation relativement à la base $B = \{1, t, t^2\}$ est donnée par:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$[T(\mathbf{p})]_B = [T]_B[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_0 - a_1 + 5a_2 \\ 5a_0 + 5a_2 \\ 5a_0 + 3a_1 - 4a_2 \end{bmatrix}$$

Donc, $T(\mathbf{p}) = 2a_0 - a_1 + 5a_2 + (5a_0 + 5a_2)t + (5a_0 + 3a_1 - 4a_2)t^2$

3. (*10 points*) Soit le système dynamique $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtenez une solution pour ce système dynamique. Calculez ce qui se passe lorsque k tend vers l'infini. Dites si l'origine est un point d'attraction, de répulsion ou de selle. Donnez également, selon le cas, la direction de plus grande attraction ou la direction de plus grande répulsion ou les deux. Justifiez vos réponses.

$$A = A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -4 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 24 - 10\lambda + \lambda^2 - 8 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = (\lambda-8)(\lambda-2)$$

Valeurs propres: 8 et 2

$\lambda = 8$: $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2,\ x_2 = x_2$

Vecteur propre: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$

$\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2/2,\ x_2 = x_2$

Vecteur propre: $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2$

Condition initiale: $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

Donc: $\mathbf{x}_k = 8^k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2^k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$k \to \infty$ $\mathbf{x}_k \to \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}$. L'origine est un point de répulsion. La direction de la plus grande répulsion est la droite passant par l'origine et (1, -1).

4. La solution d'un système dynamique est donnée par:

$$\mathbf{x}(t) = 3\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}e^{-7t} + 2\begin{bmatrix}6\cos t - 2\sin t\\9\cos t - 3\sin t\\10\cos t\end{bmatrix}e^{5t} - 2\begin{bmatrix}6\cos t + 2\sin t\\9\cos t + 3\sin t\\10\sin t\end{bmatrix}e^{5t}$$

a) (*5 points*) Donnez les valeurs propres de la matrice représentant ce système ainsi que la condition initiale, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$. Justifiez vos réponses.

a) $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 5 + i$, $\lambda_3 = 5 - i$

Conditions initiales: on pose $t = 0$.

$$3\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}6-0\\9-0\\10\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}6+0\\9+0\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\9\\20\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6\\9\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\\20\end{bmatrix}$$

b) (*5 points*) Sans faire les calculs numériques, dites comment vous feriez pour obtenir la matrice représentant ce système.

On trouve la solution "complexe", en décomposant les sinus et les cosinus en exponentielles complexes. On regroupe selon $e^{(5-i)t}$, $e^{(5+i)t}$ et e^{-7t}. On obtient les 3 vecteurs propres et on forme la matrice A. On prend les valeurs propres pour former D. $A = PDP^{-1}$.

5. On désire calculer la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

a) (*10 points*) Calculez la matrice Q.

Orthogonalisation:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} - \left(\frac{5+1+1+5}{4}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - \left(\frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} - \left(\frac{-1+5-3-9}{4}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-2+10+6-18}{16}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Normalisation:

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 4, \ \|\mathbf{v}_1\| = 2$

$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 16, \ \|\mathbf{v}_2\| = 4$

$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 16 + 16 + 16 + 16 = 64, \ \|\mathbf{v}_3\| = 8$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b) (*5 points*) Calculez la matrice *R*.

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = R$$

6. Matlab (*10 points*)

On veut démontrer l'effet du filtrage sur un signal bruité, **x**. Un filtre numérique simple est réalisé par l'équation suivante, **y** étant la sortie du filtre et **x** le signal à son entrée:

$$\mathbf{y}(i) = k_1\mathbf{y}(i-1) + k_2\mathbf{x}(i)$$

Un vecteur **s** contenant le signal non bruité est additionné à un vecteur de bruit **b** pour obtenir **x** (i.e. **x** = **s** + **b**). La fonction à écrire prend comme arguments un paramètre a ainsi que les coefficients du filtre k_1 et k_2 et retourne le signal filtré **y**. On pose la condition initiale **y**(1) = **x**(1). Si $a = 0$, la fonction trace un graphique contenant le signal filtré et le signal bruité en fonction du temps. Dans le cas contraire, la fonction trace deux graphiques sur une même page, l'un représentant le signal bruité en fonction du temps et l'autre le signal filtré en fonction du temps. Pour vous faciliter la tâche, la fonction est en partie écrite ci-dessous. Vous n'avez qu'à remplir les espaces soulignées. Comme signal non bruité, on prend $s(t) = \sin(0.4\pi t)$ pour $0 \le t \le 10$.

```
function y=filtre(k1, k2, a)

t=linspace(0,10); %vecteur contenant le temps
s=sin(2*pi/5*t); % signal non bruité
n=0.1*rand(size(t)); % bruit
x=s+n; % signal bruité
y(1)=x(1); % condition initiale
for i=2:100
   y(i)=k1*y(i-1)+k2*x(i); %calcul du filtre
end

if (a==0) %Cas d'un seul graphique
   plot(t,x,t,y) % Tracé du graphique
   xlabel('temps')
   ylabel('Signal bruité et signal filtré')
else %Cas de deux graphiques
   subplot(2,1,1); %Sélection du premier graphique
   plot(t,x) % Tracé du graphique
   xlabel('temps')
   ylabel('Signal bruité')
   subplot(2,1,2) %Sélection du deuxième graphique
   plot(t,y) % Tracé du graphique
   xlabel('temps')
   ylabel('Signal filtré')

end
```

7. Vrai ou faux

   a) (*1 point*) Si une matrice A 5×5 a moins de 5 valeurs propres distinctes, alors A n'est pas diagonalisable.

      Faux.

   b) (*1 point*) Si W est un sous-espace de $\mathbf{R}^n$, alors W et $W^{\perp}$ n'ont aucun vecteur en commun.

      Faux.

   c) (*1 point*) Si deux vecteurs sont orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants.

      Vrai.

   d) (*1 point*) Si une matrice U a des colonnes orthonormales, alors $UU^T = I$.

      Faux.

   e) (*1 point*) Si W est un sous-espace vectoriel, alors $\|\text{proj}_W\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - \text{proj}_W\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2$.

      Vrai.

8. (*5 points*) Soit U et V deux matrices orthogonales. Montrez que UV est une matrice orthogonale.

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1}$$

$$= V^TU^T$$

$$= (UV)^T$$

UV est inversible car c'est le produit de deux matrices inversibles.

9. *Matrice compagnon*

On définit la matrice compagnon d'un polynôme $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$ comme étant la matrice $n \times n$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \ldots & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

a) (*2 points*) Écrivez la matrice compagnon du polynôme $p(t) = 10 - 7t + t^2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$$

b) (*3 points*) Soit le polynôme $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + t^3$ avec $p(\lambda) = 0$. Montrez que $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}^T$ est un vecteur propre de la matrice compagnon correspondant à $p(t)$. (Indice: expliquez d'abord pourquoi $\lambda^3 = - a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2$).

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$C_p \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a_0 - a_1\lambda - a_0\lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

10. (*5 points*) Soit la transformation T de $\mathbf{P}_3$ vers $\mathbf{P}_4$ telle que $T(\mathbf{p}) = (a_0 + a_1 t)p(t)$. Montrez que cette transformation est linéaire et donnez la matrice M relativement aux bases $\{1, t, t^2, t^3\}$ et $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

Linéarité:

$T((\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)) = (\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t))\,(a_0 + a_1 t)$

$= \mathbf{p}(t)(a_0 + a_1 t) + \mathbf{q}(t)(a_0 + a_1 t)$

$= T(\mathbf{p}(t)) + T(\mathbf{q}(t))$

$T(c\mathbf{p}(t)) = c\mathbf{p}(t)(a_0 + a_1 t)$

$= c(\mathbf{p}(t)(a_0 + a_1 t))$

$= cT(\mathbf{p}(t))$

$$M = [[T(1)]_C\ [T(t)]_C\ [T(t^2)]_C [T(t^3)]_C]$$

où $C = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$